# 目　录

# §1 Sylvester 问题

“他瘦得像欧几里得的一条直线。”

——高尔斯华绥《福尔赛世家》

这一节讨论一些与直线有关的问题. 其中, 最主要的一个是英国数学家 J. J. Sylvester (1814—1897) 提出的 (例 1).

数学史家 Bell 的名著《数学精英》(Man of Mathematics), 描绘了从古至今的三十多位数学家, Sylvester 就是其中的一位.

Sylvester 多才多艺. 他 25 岁时就因数学上的成就被选为英国皇家学会会员. 后来做过保险公司的统计员, 律师, 教授. 在他当统计员时, 兼做私人教师, 鼎鼎大名的南丁格尔护士就是其学生之一. 在他当律师时, 与 Cayley 一起建立了代数不变量的理论. 1870 年他因“超龄”从教授职位退休后, 出版了一本《诗律》. 而后, 在 62 岁时他又飞越大西洋, 到美国霍普金斯大学重新执教. 他毕生从事数学研究,“几乎任一个数学领域都给了他一个足资发现的迷人的世界”.

1893 年, Sylvester 在《教育时报》杂志 (Educational Times) 上提出一个几何问题, 即下面的例 1.

**例 1** 证明不可能在平面上放有限多个点, 使得每一条

过其中两点的直线都过第三个点，除非这些点全在同一条直线上.

换句话说，如果在平面上给出 $n$ 个点，并且过每两点的直线通过第三个点，那么这 $n$ 个点在一条直线上.

稍后刊登的解答是不正确的. 或许 Sylvester 本人有正确的解答，但没有能保存下来. 直到 1933 年，Karamata 与 Erdös 重新提出这个问题，T. Gallai 才成功地给出证明，但推导相当复杂. 后来，出现了许多不同的证明与推广.

这里先介绍三个证明.

**证明 1** $n$ 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 至多组成 $C_n^2$ 条直线. 如果每条直线 $P_iP_j$ 外都有已知点，那么这点到 $P_iP_j$ 的距离大于 0. 这些大于 0 的距离(有限多个)中必有一个最小. 不妨设 $P_1$ 到 $P_2P_3$ 的距离最小.

设 $P_1$ 在 $P_2P_3$ 上的射影为 $Q$. 由已知，$P_2P_3$ 上还有一个已知点 $P_4$. $P_2$、$P_3$、$P_4$ 三点中必有两点在 $Q$ 的同侧，不妨设 $P_2$ 在 $Q$、$P_3$ 之间. 这时直角三角形 $P_1QP_3$ 的斜边 $P_1P_3$ 上的高 $QE<QP_3$ 上的高 $P_1Q$，从而 $P_2$ 到 $P_1P_3$ 的距离 $\leqslant QE<P_1Q$(图 1.1)，与 $P_1Q$ 的最小性矛盾.

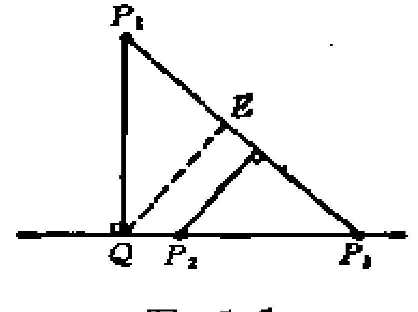


图 1.1

因此，$n$ 个已知点必须在一条直线上.

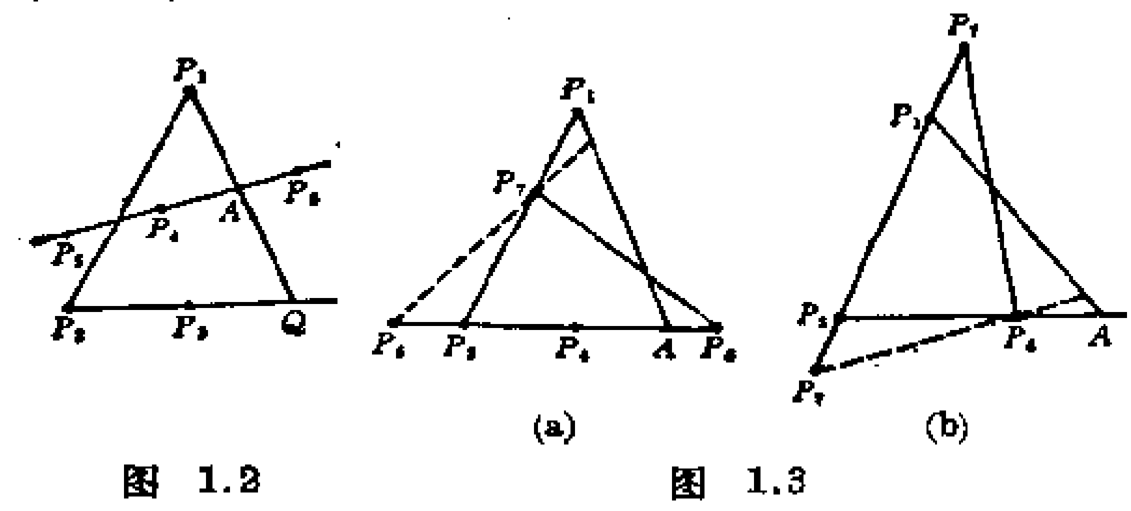
这个证明属于 L. M. Kelly. 大概是最简单，最优雅的一个. 不过这个证明利用了距离的概念. 下面的证明仅利用点与线的关系.

**证明 2** 首先 Sylvester 问题可改述为这样的形式：

如果 $n$ 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 不共线，那么至少有一条直线恰过其中两个点.

不妨设 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 不共线. 过 $P_1$ 与其他已知点的直线至多 $n-1$ 条, 与直线 $P_2P_3$ 的交点至多 $n-1$ 个. 因此, 可在 $P_2P_3$ 上取一点 $Q$ 不是上述交点, 从而直线 $P_1Q$ 上仅含一个已知点 $P_1$.

直线 $P_iP_j(1<i<j\leqslant n)$至多 $C_{n-1}^2$ 条, 它们与 $P_1Q$ 的交点(包括 $P_1$ 与 $Q$ 在内)至多 $C_{n-1}^2$ 个, 因此其中必有一点 $A$, 在线段 $P_1A$ 内没有其他交点($A$ 可能与 $Q$ 重合). 设 $A$ 是直线 $P_4P_5$ 与 $P_1Q$ 的交点. 如果 $P_4P_5$ 上没有其他已知点, 那么结论成立. 否则设 $P_6$ 在直线 $P_4P_5$ 上. $P_4$、$P_5$、$P_6$ 三个点中至少有两个在 $A$ 点同侧. 不妨设线段 $AP_5$ 含有 $P_4$, 不含 $P_6$(图 1.2).



(a) (b)

图 1.2 图 1.3

我们断言直线 $P_1P_5$ 上没有其他的已知点. 假设有 $P_7$ 在直线 $P_1P_5$ 上, 那么当 $P_7$ 在线段 $P_1P_5$ 内时, 直线 $P_6P_7$ 与线段 $AP_1$ 有公共点(图 1.3(a)); 当 $P_7$ 在线段 $P_1P_5$ 外时, 直线 $P_4P_7$ 与线段 $AP_1$ 有公共点 (图 1.3(b)), 均与 $A$ 的定义不符.

因此直线 $P_4P_5$ 或 $P_1P_5$ 上没有其他的已知点.

**证明 3** 这个证明借助于立体几何.

设平面 $M$ 上 $n(\geqslant 3)$个点 $P_1$, $P_2$, $\cdots$, $P_n$ 不全共线.

在平面 $M$ 外任取一点 $O$, 考虑所有形如

$$\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\lambda_2\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{OP_n},\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant1(i=1, 2, \cdots, n)$$

的向量 $\overrightarrow{OP}$. 它的端点 $P$ 组成一个凸多面体，每一个面都是中心对称的多边形, 并且与某条直线 $P_{j_1}P_{j_s}$ 平行, 它的边分别与 $OP_{j_1}, OP_{j_2}, \cdots, OP_{j_s}$ 平行, $P_{j_1}, P_{j_2}, \cdots, P_{j_s}$ 是直线 $P_{j_1}P_{j_s}$ 上的全部已知点(注).

由 Euler 定理

$$v-e+f=2,$$

其中 $v$、$e$、$f$ 分别是这个多面体的顶点、棱与面的个数.

在每个顶点处至少有 3 条棱, 所以

$$3v\leqslant2e.$$

与上式结合消去 $v$ 得

$$\frac{2}{3}e-e+f\geqslant2,$$

即
$$2e\leqslant6(f-2),$$

从而有一个面的边(棱)数 $\leqslant\dfrac{2e}{f}\leqslant\dfrac{6(f-2)}{f}<6$.

注意这个多面体的面都是中心对称的多边形，所以必有一个面是平行四边形，这时与这个平面平行的直线 $P_1P_2$ 上只有 $P_1$、$P_2$ 两个已知点($OP_1$、$OP_2$ 分别与平行四边形的边平行).

这个证明显示不仅低维(平面)的问题可以向高维(空间)推广，而且高维空间可以用来解决低维的问题. 本书不准备多举这样的例子, 因为三维空间已经不如平面的图形直观, 更不必说须凭借想象的 $n$ 维空间了.

**注** 当 $n=3$ 时，$P$ 点组成的立体是以 $OP_1$、$OP_2$、$OP_3$ 为棱的平行六面体. 假设结论对 $n$ 成立，$P$ 点组成一个所述

的凸多面体，将它的每个点依向量 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平移．所有与 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平行的面，如图1.4(a)，多边形 $ABCDEF$ 成为 $ABCC'D'E'F'F$，边数增加2，它仍然中心对称，新的中心由原中心平移 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}_{n+1}$，这时 $P_{n+1}$ 在与面 $ABCD$ 平行的直线 $P_{j_1}P_{j_2}$ 上．对不与 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平行的面，可设想 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 为(平行的)一束光线，被照到的面，如图1.4(b)中的 $ABCD$，仍为新立体的面．不被照到的面，如 $EFGH$，它平移后成为新立体的面 $E'F'G'H'$．新立体 $ABCDEHGB'C'D'E'F'G'H'$ 还有一些与 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平行的面．它是凸的(参见下节例1)．

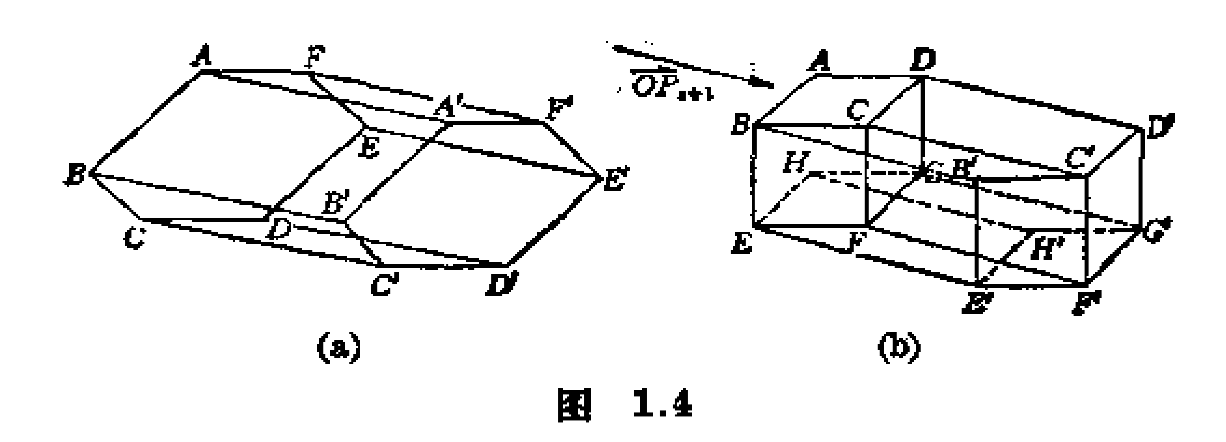



图　1.4

在后面，我们还会说到例1的推广与加强(因而也给出了例1的新的证明)．

这里先说一个例1的应用．

**例2**　如果平面上 $n$ 个点不全共线，那么它们中每两点所确定的直线至少有 $n$ 条．

**证明**　用数学归纳法．当 $n=3$ 时，结论显然成立．

假设结论对 $n$ 成立．考虑 $n+1$ 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$．这些点不全在一条直线上，所以根据例1，必有一条直线恰过其中两个点，不妨设直线 $P_1P_{n+1}$ 上没有其他的点 $P_i$($2\leqslant i\leqslant n$)．

如果点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 不在一条直线上，由归纳假设，至少有 $n$ 条直线，每条过 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中两个或更多个点，这些直线均不同于 $P_1P_{n+1}$，所以连同 $P_1P_{n+1}$，至少有 $n+1$ 条直线。

如果点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 在一条直线 $s$ 上，那么 $P_1P_{n+1}$，$P_2P_{n+1}, \cdots, P_nP_{n+1}$ 及 $s$ 为 $n+1$ 条不同的直线。

因此命题成立。

显然 $n$ 个点中有 $n-1$ 个共线时，不同的直线恰有 $n$ 条。如果其中至多有 $n-2$ 个点共线，Erdös 猜想在 $n$ 充分大时，至少有 $2n-4$ 条不同的直线。这个猜想是正确的，见例 23。

以下，为简便起见，称至少过两个已知点的直线为连结直线。恰过两个已知点的直线为 Gallai 直线或 $G$ 直线。

例 1 可叙述成：

如果 $n$ 个已知点不在同一条直线上，那么至少有一条 $G$ 直线。

换句话说，设 $g$ 为 $G$ 直线的条数，那么 $g \geqslant 1$。

这一结论大有改进的余地。请看后面的例 8～例 11。

在欧氏平面中，每两点确定一条直线，但每两条直线不一定都有交点。为了消除这种缺陷，我们引进实射影平面 $\boldsymbol{P}^2$（$\boldsymbol{P}$ 表示射影，2 表示二维空间即平面）。

约定欧氏空间中的平行直线 $l_1$、$l_2$“相交于”一个“无穷远点”$P_\infty$，凡与 $l_1$ 平行的直线均过 $P_\infty$，所有的无穷远点在一条“无穷远直线”$l$ 上。这样，每两条直线均恰有一个交点，即在原来意义上相交的直线交于普通的点，平行的直线相交于无穷远点。

$\boldsymbol{P}^2$ 中的点还可以用齐次坐标 $(x, y, z)$ 表示，其中 $x$、$y$、$z$ 是不全为 0 的实数。对于非零实数 $k$，$(kx, ky, kz)$ 与

$(x, y, z)$表示同一个点。

当 $z\neq0$ 时，$(x, y, z)$就是欧氏平面中的点$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$. 当 $z=0$ 时，$(x, y, z)$是新增加的无穷远点.

例如欧氏平面中的原点$(0, 0)$，在 $P^2$中可写成$(0, 0, z)$，其中 $z\neq0$.

欧氏平面中的直线 $ax+by+c=0$($a$, $b$ 不全为 0)可写成齐次形式

$$ax+by+cz=0. \tag{1}$$

因此，在 $P^2$ 中，直线与点一样，也可以用三元齐次坐标$(a, b, c)$表示，其中 $a$、$b$、$c$ 不全为0. 当 $a=b=0$ 时，直线(1)成为 $z=0$，它代表无穷远直线.

由于在 $P^2$ 中，点与直线是对偶的(每两点确定一条直线，每两条直线确定一个点)，所以有很多对偶的命题，即将命题中的点与直线互换产生的命题. 如果原命题成立，那么对偶命题也成立. 这称为**对偶原理**。

例如，由例 1，我们得到：

在 $P^2$ 中，如果 $n$ 条直线不交于一点，那么必有一点，恰在两条已知直线上.

$P^2$与欧氏平面当然有些不同. 例如在欧氏平面中，任一点 $P_1$ 将过它的直线 $l$ 分为两个部分(两条以 $P_1$ 为端点的射线)，而在 $P^2$ 中，点 $P_1$ 并不能将 $l$ 分为两个部分. 从 $P_1$ 沿 $l$ 向"东"前进，最后将通过 $P_\infty$ 在"西"边出现，又回到 $P_1$. 要将 $l$ 分成两部分，必须在 $l$ 上取两个点 $P_1$、$P_2$(图 1.5(a)). 直线 $l$ 被分成有限线段 $P_1P_2$ 与含无限远点的无限线段 $P_1P_2$.

类似地，直线 $l$ 将欧氏平面分为两个部分：上半平面与下

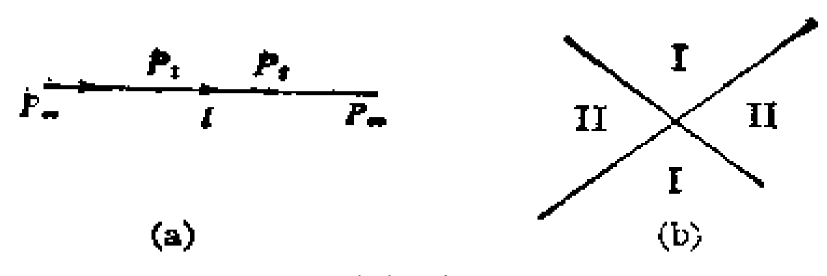



图 1.5

半平面，而在 $P^2$ 中，$l$ 不能将 $P^2$ 分成两个部分. 在图 1.5(b)中，两条直线将欧氏平面分为四个部分，而在 $P^2$ 中，两条直线将它分为两个部分：$I$ 与 $II$，因为每一个对顶角是连通的.

例 3　$n$ 条一般位置的直线，即每两条互不平行，每三条不共点的直线，将欧氏平面分成多少个区域（连通部分）？其中有多少个是有限的？

**解**　结论是共有

$$R=1+n+C_n^2=1+C_{n+1}^2 \tag{2}$$

个区域，其中

$$R'=C_{n-1}^2 \tag{3}$$

个是有限的.

上述结论是 J. Steiner 在 1826 年首先证明的.

(2)可以用归纳法，奠基($n=1$)是显然的. 设(2)成立，增添一条直线 $l$ 后，$l$ 被原有的 $n$ 条直线分为 $n+1$ 段，每一段将原来的一个区域分为两个区域，因而增加了 $n+1$ 个区域，共有

$$1+n+C_n^2+(n+1)=1+(n+1)+C_{n+1}^2$$

个区域. 因此，(2)对一切自然数 $n$ 均成立.

为了证明(3)，只需作一个充分大的圆包含这 $n$ 条直线的所有交点. 这时，每条直线与圆有两个交点，$n$ 条直线将圆

分成 $2n$ 份，每一份恰属于上述 $R$ 个区域中的一个无限区域，每个无限区域也恰好含一份圆弧．因此无限区域的个数是 $2n$．有限区域的个数

$$R'=R-2n=1-n+C_n^2=C_{n-1}^2.$$

**例 4** $n$ 条一般位置的直线将 $\boldsymbol{P}^2$ 分为多少个区域？

**解** 这里一般位置指每三条直线不共点(在 $\boldsymbol{P}^2$ 中，没有平行直线与相交直线的差别)．

由上例，欧氏平面中有 $C_{n-1}^2$ 个有限区域，它们也是 $\boldsymbol{P}^2$ 中的(互不连通的)区域．欧氏平面中有 $2n$ 个无限区域，每两个(属于某一个对顶角)相连通，因而是 $\boldsymbol{P}^2$ 中的 $n$ 个(含无穷远点的)区域．于是共有

$$C_{n-1}^2+n=1+C_n^2 \tag{4}$$

个区域．

如果直线不处于一般位置，那么上面的公式需适当修正．S. Roberts 1889 年得出下面的(5)．这公式在 1963 年又被重新发现．

**例 5** 设在欧氏平面中有 $n$ 条直线，其中有 $\lambda_i(\geqslant 3)$ 条相交于同一点($i=1, 2, \cdots, k$)，$\mu_j$ 条互相平行($j=1, 2, \cdots, h$)，则这些直线将欧氏平面分为

$$R=1+n+C_n^2-\sum_{i=1}^{k}C_{\lambda_i-1}^2-\sum_{j=1}^{h}C_{\mu_j}^2 \tag{5}$$

个区域，其中有限的区域

$$R'=\max\left(1-n+C_n^2-\sum_{i=1}^{k}C_{\lambda_i-1}^2-\sum_{j=1}^{h}C_{\mu_j}^2,\ 0\right) \tag{6}$$

个．

对于(5)，这里给出两个证明．

**证明 1** 对 $n$ 进行归纳．奠基显然．设(5)对 $n$ 条直线

成立，考虑第 $n+1$ 条直线 $l$，先设 $l$ 与前 $n$ 条直线均相交。

在(5)中，可以认为 $\sum_{i=1}^{k}$ 包括 $\lambda_i=2$ 的情况（这时 $C_{\lambda_i-1}^2=0$）。我们将相应的交点 $P_i$ 在 $l$ 上的情况记为 $\sum_1$，$P_i$ 不在 $l$ 上的情况记为 $\sum_2$，并令

$$\lambda_i'=\begin{cases}\lambda_i+1, & \text{若 } i\in\sum_1;\\ \lambda_i, & \text{若 } i\in\sum_2.\end{cases} \tag{7}$$

设 $l$ 被前 $n$ 条直线分为 $m$ 段，则

$$n+1=m+\sum\nolimits_1(\lambda_i-1). \tag{8}$$

（若 $l$ 不过各直线的交点，则它被分为 $n+1$ 段；若 $l$ 过交点 $P_i$，并且前 $n$ 条直线中有 $\lambda_i$ 条过 $P_i$，则段数减少 $\lambda_i-1$。）因为每一段表示增加一个区域，所以共有区域

$$\begin{aligned}
&1+n+C_n^2-\sum C_{\lambda_i-1}^2-\sum C_{\mu_j}^2+m\\
&=1+n+C_n^2-\sum C_{\lambda_i-1}^2-\sum C_{\mu_j}^2+(n+1)-\sum\nolimits_1(\lambda_i-1)\\
&=1+(n+1)+C_{n+1}^2-\sum\nolimits_1(C_{\lambda_i-1}^2+C_{\lambda_i-1}^1)\\
&\quad-\sum\nolimits_2 C_{\lambda_i-1}^2-\sum C_{\mu_j}^2\\
&=1+(n+1)+C_{n+1}^2-\sum\nolimits_1 C_{\lambda_i'-1}^2-\sum\nolimits_2 C_{\lambda_i'-1}^2-\sum C_{\mu_j}^2\\
&=1+(n+1)+C_{n+1}^2-\sum C_{\lambda_i'-1}^2-\sum C_{\mu_j}^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

如果 $l$ 与前 $n$ 条直线中 $\mu_h$ 条平行，那么 $l$ 被分成的段数减少 $\mu_h$，平面被分成的区域比(9)减少 $\mu_h$，因而区域共

$$\begin{aligned}
&1+(n+1)+C_{n+1}^2-\sum C_{\lambda_i'-1}^2-\sum C_{\mu_j}^2-C_{\mu_h}^1\\
&=1+(n+1)+C_{n+1}^2-\sum C_{\lambda_i'-1}^2-\sum C_{\mu_j'}^2
\end{aligned} \tag{10}$$

个，其中

$$\mu_j'=\begin{cases}\mu_j, & j=1,2,\cdots,h-1;\\ \mu_{j+1}, & j=h.\end{cases} \tag{11}$$

如果 $l$ 与前 $n$ 条直线中 1 条平行，这可以看成上款的特

例，因为可令 $\mu_h=1$（这时 $C_{\mu_h}^2=0$）.

于是，(5)对一切自然数 $n$ 成立.

**证明 2** 取一条直线 $b$ 不与已知的 $n$ 条直线平行．这直线称为横扫直线.

横扫直线 $b$ 的初始位置远离上述 $n$ 条直线的交点．因此，它被这 $n$ 条直线分为 $n+1$ 段(两条射线，$n-1$ 条线段)，每段各属一个区域，共 $n+1$ 个区域.

平移 $b$．$b$ 首先横扫上述的 $n+1$ 个区域．当 $b$ 通过一个 $\lambda_i$ 重点 $P_i$(即过 $P_i$ 有 $\lambda_i$ 条已知直线)时，它横扫的区域增加 $\lambda_i-1$ 个(例如图 1.6 中，$b$ 过 4 重点 $P$ 后，横扫的区域增加了 I、II、III 三个)．于是，在 $b$ 横扫整个平面时，共横扫了

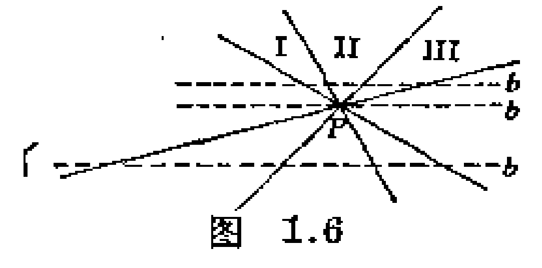


图 1.6

$$1+n+t+\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-1) \tag{12}$$

个区域，其中 $t$ 是二重点的个数，$\lambda_i\geqslant3(i=1, 2, \cdots, k)$．(12)也就是 $n$ 条直线将平面分成的区域数 $R$.

现在，设法定出二重点(两条直线的交点)的个数 $t$.

为此，考虑直线对．显然有

$$s_1=t+\sum C_{\lambda_i}^2 \tag{13}$$

对两两相交的直线，又有

$$s_2=\sum C_{\mu_j}^2 \tag{14}$$

对两两不相交的直线．因为

$$C_n^2=s_1+s_2, \tag{15}$$

所以

$$t=C_n^2-\sum C_{\lambda_i}^2-\sum C_{\mu_j}^2. \tag{16}$$

将(16)代入(12)得

$$R=1+n+C_n^2-\sum C_{\lambda_i}^2-\sum C_{\mu_j}^2+\sum C_{\lambda_i-1}^1$$
$$=1+n+C_n^2-\sum C_{\lambda_i-1}^2-\sum C_{\mu_j}^2,$$

即(5)成立.

与例3的推导完全相同，从(5)可以得到(6). 当且仅当 $n$ 条线互相平行时，推导不适用，此时显然有 $R'=0$.

第二个证明比第一个证明更有启发性，它不需要预先知道公式(5). 相反地，公式(5)可在推导过程中自然而然地得出.

证明所用的工具——横扫直线，不仅本身有趣，而且可用于其他场合.

类似于例4，在 $P^2$ 中，有

**例6** 如果 $n$ 条直线中有 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,k)$ 条交于一点，那么这 $n$ 条直线将 $P^2$ 分为

$$R''=1+C_n^2-\sum_{i=1}^{k}C_{\lambda_i-1}^2 \tag{17}$$

个区域.

**证明** 在 $P^2$ 中，平行直线相交于无穷远点，所以(17)中的和号 $\sum_{i=1}^{k}$ 已经包含例5中的平行直线. 于是(6)可写成

$$R'=1-n+C_n^2-\sum_{i=1}^{k}C_{\lambda_i-1}^2-\sum(\mu_j-1). \tag{6'}$$

这些有限区域仍是 $P^2$ 中的区域. 此外，含于一对顶角中的2个无穷区域在 $P^2$ 中是同一区域，但需注意(与例4不同)夹在两平行线间的两个无穷区域，在 $P^2$ 中仍是两个区域(图1.7中共有15个区域，例如10完全被 $l_1$、$l_2$——它们相交于无穷远点——及其他直线封住，要走到11必须越过边界). 因此

$$R''=R'+n+\sum(\mu_j-1)=1+C_n^2-\sum_{i=1}^{k}C_{\lambda_i-1}^2.$$

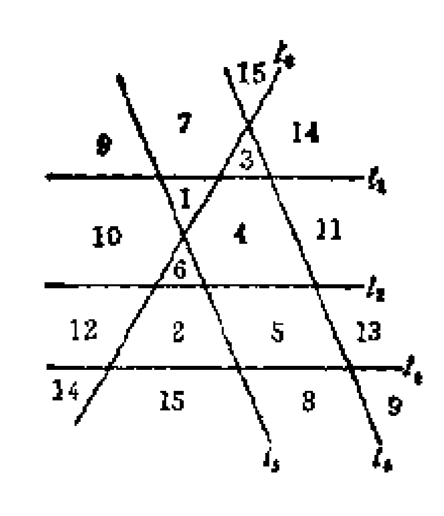


图 1.7

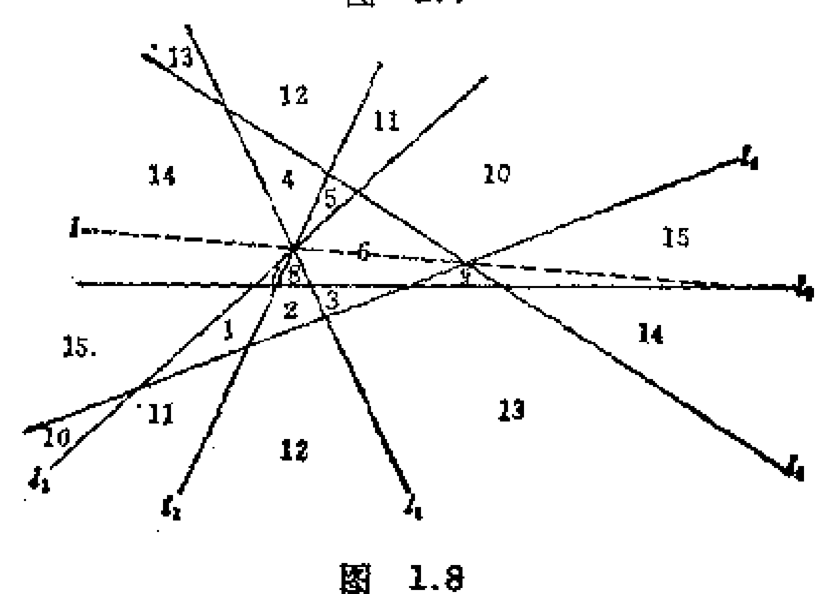


图 1.8

其实，我们可以在欧氏平面中任取一条直线作为 $P^2$ 的无穷远直线(因为 $P^2$ 中所有直线的地位都是平等的)，例如图1.8中，以 $l$ 作为无穷远直线(用虚线表示)．这时 $\mu_j$ 条平行线交于 $l$ 上一点．于是这 $n$ 条直线在欧氏平面上构成 $1+n+C_n^2-\sum C_{\lambda_i-1}^2$ 个区域(平行直线的条数已包括在 $\sum$ 中)，其中有 $2n$ 个区域，在 $P^2$ 中每两个是同一区域(与例4完全相同)，因而在 $P^2$ 中共有

$$R''=R-n=1+C_n^2-\sum C_{\lambda_i-1}^2$$

个区域.

与区域有关的一个问题是有界线段的条数.

**例 7** 设 $n$ 条直线不全平行，直线的交点分别为 $\lambda_i$ 重，$i=1, 2, \cdots, k$，则(在欧氏平面中)这些直线相截得到

$$S'=-n+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \tag{18}$$

条(有界的)线段，每一条内部不含有这些直线的交点.

**证明** 取一条横扫直线 $b$，$b$ 与已知直线均不平行. 当 $b$ 在遥远的位置不过任一交点时，$b$ 与这 $n$ 条直线相交，每条直线上与 $b$ 相交的部分是一条射线("无限的"线段).

平移 $b$. 在 $b$ 通过一个 $\lambda_i$ 重点时，它所截过的线段或射线增加 $\lambda_i$ 条. 于是在 $b$ 横扫整个平面时，共与

$$S=n+\sum\lambda_i \tag{19}$$

条线段或射线相截. (19)也就是这 $n$ 条直线相截得到的、内部不含交点的线段或射线的个数.

用例 3 的方法，$n$ 条直线与一个大圆有 $2n$ 个交点，每个交点有一条射线通过，每条射线恰通过一个交点. 因此(19)中有 $2n$ 条射线. 从而线段(有界的)共

$$S'=S-2n=-n+\sum\lambda_i$$

条.

**注 1** (18)也可用归纳法证明.

**注 2** 若 $n$ 条直线互相平行，则 $S'=0$.

现在，我们回到已经阔别许久的 Sylvester 问题. 1951 年，G. A. Dirac 改进了例 1，即有：

**例 8** 如果 $n$ 个已知点不在同一条直线上，那么 $G$ 直线(恰过两个已知点的直线)的条数 $g\geqslant 3$.

**证明** 为了证明这一结论，我们利用实射影平面 $P^2$.

设连结直线(过任两个已知点的直线)的集合为 $S$，已知点的集合为 $\mathscr{P}$. 对任一点 $P\in\mathscr{P}$, $S$ 中所有不过 $P$ 的直线将平面 $P^2$ 分为若干区域, $P$ 在且仅在一个区域的内部, 称这个区域为 $P$ 的"住宅". 住宅的边界是 $S$ 中的直线或直线的一部分. 这样的直线称为点 $P$ 的"邻居".

如果 $P$ 恰有一个邻居 $s$, 那么 $\mathscr{P}$ 中其余的 $n-1$ 个点都在这条直线 $s$ 上. 这时 $S$ 由 $s$ 及一个过 $P$ 的线束组成, 如图 1.9. 我们称 $S$ 为殆线束.

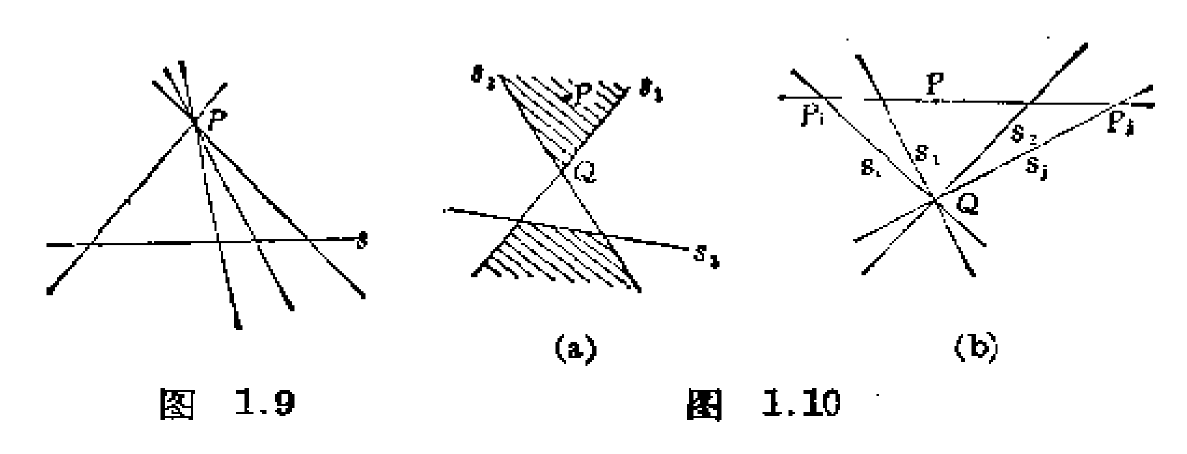



图 1.9　　　　图 1.10

如果 $P$ 恰有两个邻居 $s_1$、$s_2$, 那么 $S$ 中不过 $P$ 的直线必过 $s_1$、$s_2$ 的交点 $Q$. 否则, 设 $s_3$ 不过 $Q$, 则含 $P$ 的区域(图 1.10(a)中阴影部分), 至少有 3 条边 $s_1$、$s_2$、$s_3$, 与 $P$ 恰有两个邻居矛盾. 因此 $S$ 中不过 $P$ 的直线组成过 $Q$ 的线束 $S'$.

对 $S'$ 中任两条(过 $Q$ 的)直线 $s_i$、$s_j$, 设 $P_i$、$P_j$ 分别为这两条直线上不同于 $Q$ 的已知点(图 1.10(b)), 则 $P_iP_j$ 是 $S$ 中的直线. 它不过 $Q$, 因而由上段所证, 必过点 $P$. 固定 $i$, 让 $j$ 变动即知 $S$ 中不过 $Q$ 的直线只有一条: $P_iP$. 进而 $\mathscr{P}$ 中不同于 $Q$ 的点都在这条直线 $P_iP$ 上. 由于 $\mathscr{P}$ 中的点不全在一条直线上, 所以 $Q\in\mathscr{P}$. $S$ 由过 $Q$ 的线束 $S'$ 及直线 $P_iP$ 组成, 即 $S$ 是殆线束.

当 $S$ 是殆线束时, 显然 $g=n-1$. 设 $S$ 不是殆线束, 则根

据上面所证，$\mathscr{P}$ 中每一点至少有 3 个邻居.

记过点 $P$ 的 $G$ 直线的条数为 $g_P$. 我们分两种情况讨论.

(i) 对每个 $P\in\mathscr{P}$, $g_P\neq 0$.

这时，过 $P_1\in\mathscr{P}$ 有一条 $G$ 直线 $P_1P_2$, $P_2\in\mathscr{P}$. 设 $P_3\in\mathscr{P}$, $P_3\neq P_1$、$P_2$, 则 $P_3$ 不在直线 $P_1P_2$ 上. 若 $P_1P_3$、$P_2P_3$ 均为 $G$ 直线，则 $g\geqslant 3$. 若 $P_1P_3$(或 $P_2P_3$)不是 $G$ 直线，则 $P_1P_3$ 上有点 $P_4\in\mathscr{P}$. 过 $P_3$、$P_4$ 各有一条 $G$ 直线，它们均不同于 $P_1P_2$, 所以 $g\geqslant 3$(图 1.11(a)).

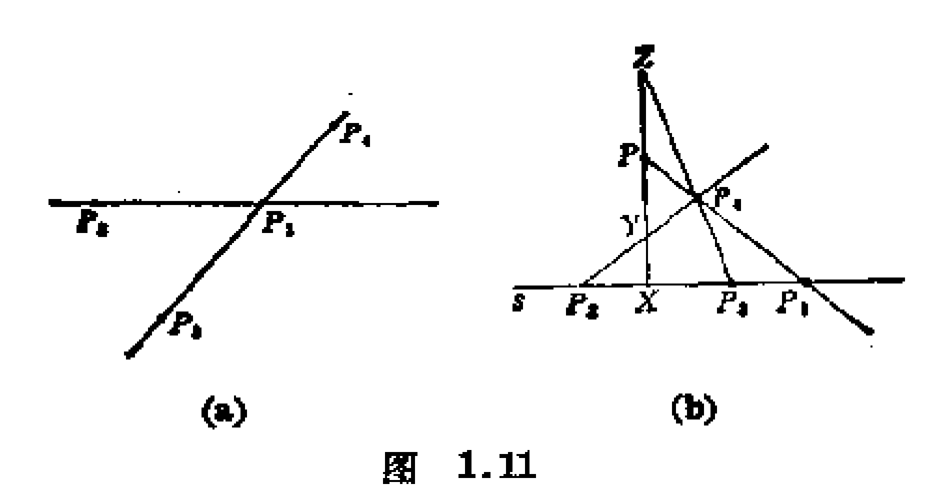


图 1.11

(ii) 有一点 $P\in\mathscr{P}$, $g_P=0$.

这时 $P$ 的邻居均为 $G$ 直线. 假设这一断言不成立，那么必有一个邻居 $s$ 上有三个点 $P_1$、$P_2$、$P_3\in\mathscr{P}$. 现在在 $s$ 上取一点 $X$, 这点属于 $P$ 的住宅的边界. 不妨设 $P_1$ 与 $X$ 将点 $P_2$、$P_3$ 分开(图 1.11(b)).

因为 $g_P=0$, $PP_1$ 不是 $G$ 直线，在 $PP_1$ 上必有 $P_4\in\mathscr{P}$. 直线 $P_4P_2$、$P_4P_3$ 与 $PX$ 的交点 $Y$、$Z$ 一在不含无穷远点的线段 $PX$ 上，一在含无穷远点的线段 $PX$ 上，从而 $P$、$X$ 被 $Y$、$Z$ 分开，即被直线 $P_4P_2$、$P_4P_3$ 分开. 这与 $X$ 在 $P$ 的住宅的边界上矛盾.

于是 $P$ 的邻居均为 $G$ 直线．前面已证 $P$ 至少有 3 个邻居，所以 $g\geqslant 3$．

例 9 中还有 $g\geqslant 3$ 的另一种证明．

对于 $n=3$ 个点，$g=3$ 显然是最佳的．但在 $n$ 相当大时，$g$ 应相当大．下面的例 10 证明 $g$ 的阶（数量级）至少为 $\sqrt{n}$．

称恰过 $\mathscr{P}$ 中 $i$ 个点的直线为 $i$ 直线，$i$ 直线的条数记为 $t_i$．前面说的 $G$ 直线就是 2 直线，$g=t_2$．

**例 9** 证明

$$g=t_2\geqslant 3+t_4+2t_5+3t_6+\cdots. \tag{20}$$

**证明** 考虑 $\mathscr{P}$ 的对偶 $\overline{\mathscr{P}}$．$\overline{\mathscr{P}}$ 由 $n$ 条直线组成，不是线束（即 $n$ 条直线不交于同一点）．$\overline{\mathscr{P}}$ 中的直线将实射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 分为若干区域．令 $f_i$ 为其中恰有 $i$ 条边的区域，$v_i$ 表示恰引出 $i$ 条边的点，$e$ 及

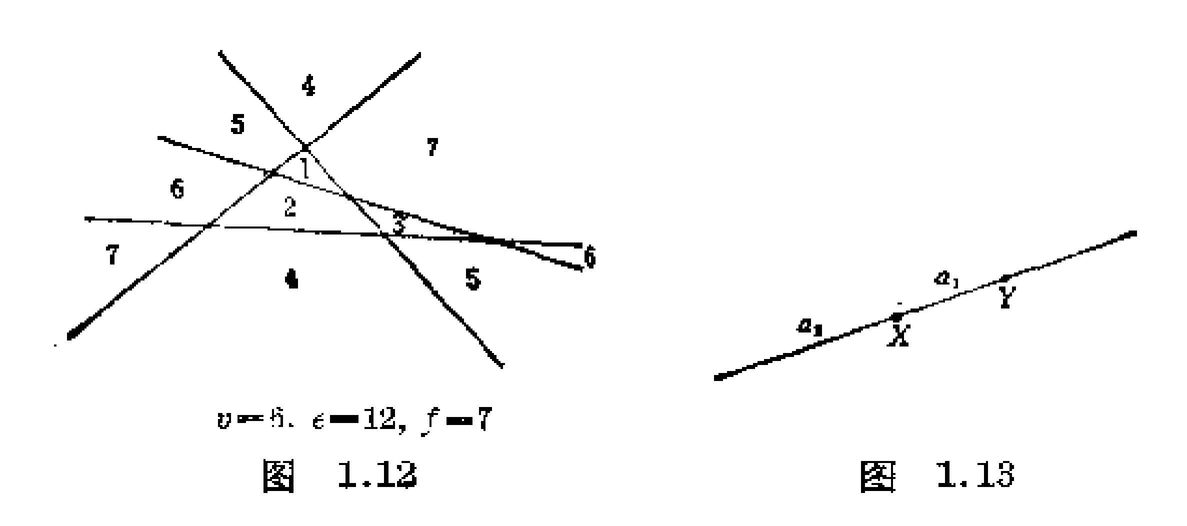
$$v=\sum v_i, \tag{21}$$

$$f=\sum f_i, \tag{22}$$

分别表示边、点、面的总数．由（$\boldsymbol{P}^2$ 的）Euler 定理，

$$v-e+f=1. \tag{23}$$

（(23)的证明见后面的注．图 1.12 是(23)的一个说明．）




$v=6,\ e=12,\ f=7$

图 1.12　　　　图 1.13

由于每条过点 $X$ 的直线，产生两条自 $X$ 引出的边 $a_1$、$a_2$（图1.13），所以每个顶点都引出偶数条边，从而当 $i$ 为奇数时，$v_i=0$．又由于每一点是至少两条直线的交点，所以每一点至少引出 4 条边，从而

$$v=v_4+v_6+v_8+\cdots. \tag{24}$$

由于 $\mathscr{P}$ 不是线束，对于 $\mathscr{P}$ 中任意两条直线，必有 $\mathscr{P}$ 中第三条直线与这两条直线都相交，并且三条直线不交于同一点，所以 $f_2=0$，从而

$$f=f_3+f_4+f_5+\cdots. \tag{25}$$

因为每条边有两个端点，每条边属于两个面，所以

$$2e=4v_4+6v_6+8v_8+\cdots, \tag{26}$$

$$2e=3f_3+4f_4+5f_5+\cdots. \tag{27}$$

由(26)、(27)得

$$3e=2v_4+3v_6+4v_8+\cdots+3f_3+4f_4+5f_5+\cdots. \tag{28}$$

将(24)，(25)，(28)代入(23)，化简得

$$\begin{aligned} v_4 &= 3+v_8+2v_{10}+3v_{12}+\cdots+f_4+2f_5+3f_6+\cdots \\ &\geqslant 3+v_8+2v_{10}+3v_{12}+\cdots. \end{aligned} \tag{29}$$

注意到 $v_4=t_2$，$v_8=t_4$，$v_{10}=t_5$，……，(29)即(20)．

作为(20)的推论，我们得到 $g\geqslant 3$．

Melchior 在 1940 年获得不等式(20)．有趣的是，他不知道 Sylvester 问题，否则 1951 年 Dirac 就没有必要证明 $g\geqslant 3$ 了．不过，例 8 的方法在下面(30)与(32)的证明中非常有用．

**注** (23)的证法很多，我们采用横扫直线．

取直线 $b$ 与已知的 $n$ 条直线均不平行．当 $b$ 在遥远处时，它经过 0 个点（已知直线的交点），$n+1$ 个区域，并且与 $n$ 条边相交．这三个数满足(23)．

平移 $b$. 当 $b$ 经过 1 个 $\lambda$ 重点后, 与 $\lambda$ 条原来不相交的边相交, 并经过原来不经过的 $\lambda-1$ 个面. $1-\lambda+(\lambda-1)=0$, 所以(23)左边保持不变.

于是, $b$ 横扫整个平面后, (23)的左边与开始时相同, 即(23)成立.

另一种证法是将实射影平面 $P^2$ 看成一个球面, 球面上的对径点作为同一个点, 即将每条直径的两个端点(如南北极)粘贴在一起(在现实世界中当然无法做到这一点, 只能倚仗丰富的想象力). 球面上的大圆作为直线. 在球面上点、边、面的个数均是 $P^2$ 中的两倍: $v'=2v$, $e'=2e$, $f'=2f$. 而 $v'-e'+f'=2$, 所以 $v-e+f=1$.

1951 年, Motzkin 证明了下面的(30).

**例 10** 如果 $n$ 个点不在一条直线上, 那么

$$C_{g+2}^{2}\geqslant n. \tag{30}$$

**证明** 由例 6, $g$ 条 $G$ 直线至多将 $P^2$ 分为 $1+C_g^2$ 个区域.

在每个区域中, 至多有一个点 $P\in\mathscr{P}$ 满足 $g_P=0$(符号同例 8, $g_P$ 即过 $P$ 点的 $G$ 直线的条数). 如若不然, 在某个区域中有两个点 $P$、$P'\in\mathscr{P}$, $P$、$P'$ 都没有 $G$ 直线通过, 那么过 $P'$ 而不过 $P$ 的任一条连结直线 $s$ 穿过这个区域, 并且 $s$ 不是 $G$ 直线. 但例 8 中已经证明 $P$ 的邻居均为 $G$ 直线. 矛盾!

于是, 满足 $g_P=0$ 的点 $P\in\mathscr{P}$ 至多 $1+C_g^2$ 个.

另一方面, $g_P>0$ 的点均在 $G$ 直线上, 每条 $G$ 直线上两个已知点. 所以, 满足 $g_P>0$ 的点 $P\in\mathscr{P}$ 至多 $2g$ 个.

综上所述, 我们有

$$1+C_g^2+2g\geqslant n,$$

即(30)成立.

由(30)立即得到

$$\frac{1}{2}(g+2)^2 > C_{g+2}^2 \geqslant n,$$

从而

$$g > [\sqrt{2n}] - 2, \tag{31}$$

即 $g$ 的数量级至少是 $\sqrt{n}$.

L. E. Kelly 与 W. O. J. Morse 在 1958 年将(31)改进为

$$g \geqslant \frac{3n}{7}. \tag{32}$$

证明需要 4 个引理，不难，但篇幅较长. 我们收入这个证明，不仅是为了完整. 更重要的是通过揣摩前人的成果，可以领悟到如何从事研究，如何从别人未能走通的地方找到成功的路. 读者如果没有足够的时间或兴趣，可以跳过这个证明.

对于 $P \in \mathscr{P}$，记 $P$ 的邻居中 $G$ 直线的条数为 $r(P)$，称 $r(P)+g(P)$ 为 $P$ 的指标，记为 $I(P)$.

**引理 1** 如果 $g(P) \neq 2$，那么 $I(P) \geqslant 3$.

**证明** 在 $S$ 为殆线束(即 $\mathscr{P}$ 中 $n-1$ 个点共线，另一点在线外)时，结论显然成立.

在 $S$ 不是殆线束时，由例 8，$P$ 至少有 3 个邻居. 我们分三种情况讨论：

(i) $g(P) \geqslant 3$. 毋需证.

(ii) $g(P)=0$. 由例 8，$r(P) \geqslant 3$.

(iii) $g(P)=1$. 设过 $P$ 的唯一的 $G$ 直线为 $PP'$，$P' \in \mathscr{P}$.

如果 $P$ 的邻居 $s$ 不是 $G$ 直线，那么 $s$ 必过 $P'$. 否则，$s$ 上有点 $P_1$、$P_2$、$P_3 \in \mathscr{P}$，又有点 $X$ 在 $P$ 的住宅的边界上，

$P_1$, $X$ 将 $P_2$、$P_3$ 分开(必要时调整下标). 由 $PP_1$ 不是 $G$ 直线可导致矛盾, 参看例 8 的 2 及图 1.11(b).

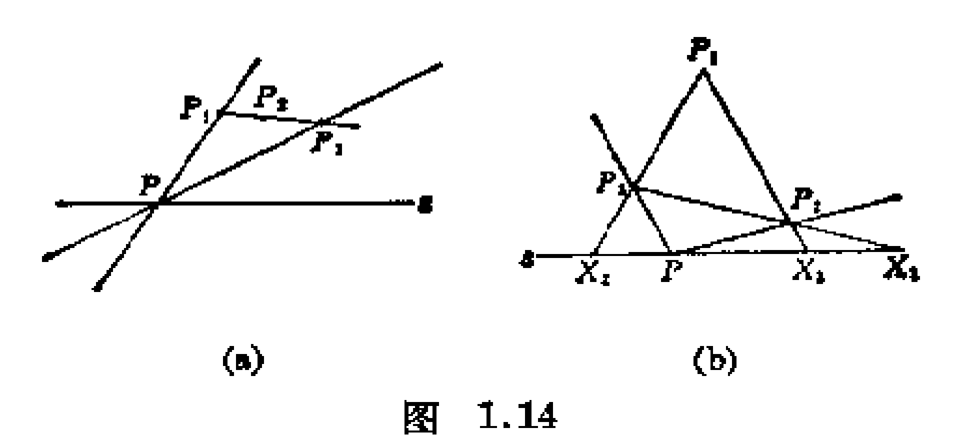
因为 $P$ 的任三个邻居不共点, 所以其中至多有两条不是 $G$ 直线(它们均过 $P'$).

于是, 在 $P$ 的邻居数 $\geqslant 4$ 时, $r(P)\geqslant 4-2=2$, 结论成立.

设 $P$ 恰有 3 个邻居. 如果邻居 $s_1$、$s_2$ 都不是 $G$ 直线, 那么 $s_1$、$s_2$ 相交于 $P'$. $P$ 的住宅为三角形, $P'$ 是三角形的一个顶点. 设 $P_1$, $P_2\in\mathscr{P}$ 是 $s_1$ 上不同于 $P'$ 的点, 必有点 $X$ 在 $s_1$ 上并且 $x$ 属于 $P$ 的住宅的边界, $x$、$P_1$ 将 $P_2$ 与 $P'$ 分开, 根据例 8 的 2 的证法($P'$ 即该处的 $P_3$), 导致矛盾. 因此 $P$ 的邻居中至少有 2 条 $G$ 直线, $I(P)\geqslant 1+2=3$.

**引理 2** 如果 $s\in S$ 是 $\mathscr{P}$ 中 3 个点 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 的邻居, 那么 $s$ 上至多有 3 个点属于 $\mathscr{P}$, 它们分别为 $P_1P_2$、$P_2P_3$、$P_3P_1$ 与 $s$ 的交点.

**证明** $P_1$、$P_2$、$P_3$ 不可能共线. 否则设 $P\in\mathscr{P}$ 为 $s$ 上一点. 适当调整下标, 可使 $P_2$、$P_3$ 同在 $PP_1$ 与 $s$ 围成的区域中, 如图 1.14(a). 这时 $P_2$ 被 $PP_1$、$PP_3$"夹住", 它不以 $s$ 为邻居.




(a) (b)

图 1.14

设 $P_iP_j$ 与 $s$ 的交点为 $X_k(\{i, j, k\}=\{1, 2, 3\})$. 如果 $s$ 上有 $P\in\mathscr{P}$ 并且 $P$ 不同于 $X_1$、$X_2$、$X_3$, 不妨设 $P$ 与 $X_1$

将 $X_2$、$X_3$ 分开，如图1.14(b)．这时 $PP_2$、$PP_3$"夹住"$P_1$，从而 $P_1$ 不以 $s$ 为邻居．矛盾．所以 $s$ 上至多有 $X_1$、$X_2$、$X_3$ 这三个点可能属于 $\mathscr{P}$.

**引理3** $S$ 中每条直线至多是 $\mathscr{P}$ 中 4 个点的邻居．

**证明** 设 $s\in S$ 是 $P_i\in\mathscr{P}(i=1,2,3,4)$ 的邻居．根据引理2，$s$ 上属于 $\mathscr{P}$ 的点只可能是图1.15中的 $\{P, Y, P'\}\cap\{P, X, P'\}$，即 $P$、$P'$．因此 $s$ 是 $G$ 直线，$P$、$P'\in\mathscr{P}$.

如果又有 $P_5\in\mathscr{P}$ 也以 $s$ 为邻居，那么 $P_5$ 必在 $P_1P$ 或 $P_1P'$ 上，也必在 $P_3P$ 或 $P_3P'$ 上，因而 $P_5$ 必与 $P_2$ 或 $P_4$ 重合．

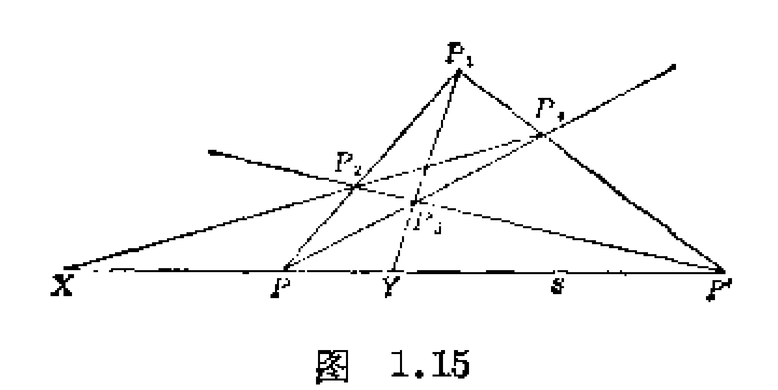



图 1.15

**引理4**

$$g\geqslant\frac{1}{6}\sum_{P\in\mathscr{P}}I(P). \tag{33}$$

**证明** 在 $\sum I(P)$ 中，每条 $G$ 直线 $PP'(P$、$P'\in\mathscr{P})$ 至多被计算 6 次，即作为过 $P$ 或过 $P'$ 的直线，各被计算 1 次，作为其他点的邻居至多被计算 4 次(引理3)．因此(33)成立．

现在，我们证明(32)．

设恰有 2 条 $G$ 直线通过的点共 $m$ 个，则过 $m$ 个点的 $G$ 直线共 $2m$ 条，这里每一条至多被计算 2 次．因此，至少有 $\frac{2m}{2}=m$ 条 $G$ 直线，即

$$g \geqslant m. \tag{34}$$

另一方面，由引理 4 及引理 1，

$$g \geqslant \frac{1}{6} \sum I(P) = \frac{1}{6}\left( \sum_{g(P)=2} I(P) + \sum_{g(P)\neq 2} I(P) \right)$$
$$\geqslant \frac{1}{6}(2m + 3(n-m)),$$

即

$$6g + m \geqslant 3n. \tag{35}$$

(34)、(35)相加得(32)。

当 $n=7$, 8 时，(32)为最佳。参见图 1.16(a)、(b)。其中虚线表示 $G$ 直线。

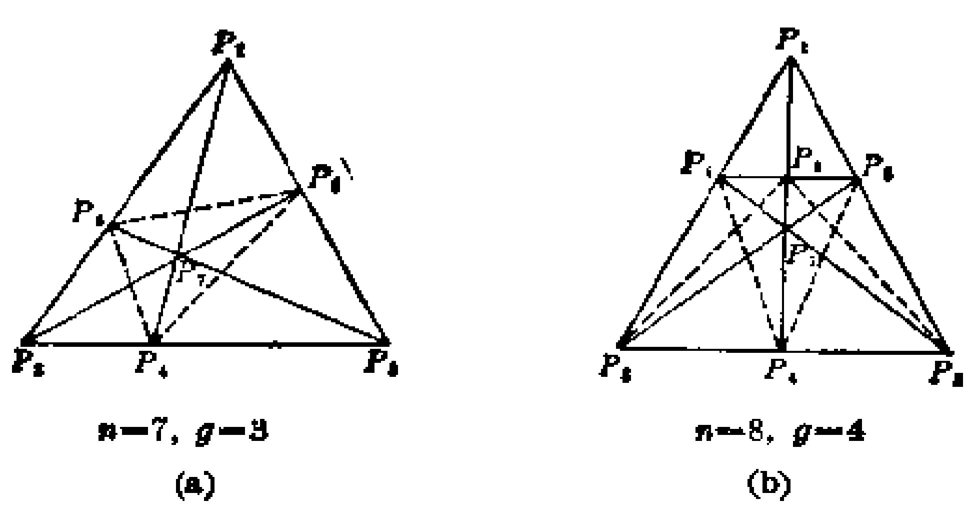



图 1.16

当 $n$ 大时，(32)仍然不够精确。Motzkin 与 Dirac 都猜测

$$g \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{36}$$

1981 年，S. Hansen 证明除了 $n=7$ 与 13，恒有

$$g \geqslant \frac{n}{2} \tag{37}$$

(于是猜测(36)成立)。他的文章长达 96 页，用了 27 个引理

与41个图. 刚才的证明与之相比，真可谓小巫见大巫. 这么长的证明，大概很少有人从头到尾看一遍. 我们这里也就从略了.

在 $n=3, 5, 7, 9, 11, 13$ 时，$g$ 的最小值分别为 3, 4, 3, 6, 6, 6.

**例 11** 试举例证明对任意偶数 $n$，(37)为最佳.

**证明** 当 $n=4k$ 时，作正 $2k$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{2k}$. 点 $P_1$, $P_2$, …, $P_{2k}$ 及 $P_iP_{i+1}$, $P_iP_{i+2}$($i=1, 2, \cdots, k$)上的无穷远点共 $n$ 个点. 过每两点作直线，这些直线中恰有 $2k$ 条 $G$ 直线. 事实上，过 $P_{i+1}$ 及 $P_iP_{i+2}$(当 $i>k$ 时，$P_iP_{i+2}\parallel P_{i-k}P_{i+k+2}$)上的无穷远点 $P'_{i+1}$ 的直线 $s_i$ 是 $G$ 直线($i=1, 2, \cdots, 2k$, $P_{2k+j}=P_j$)：因为 $P_{i+1}P_j$($j\neq i, i+2$)与 $P_iP_{i+2}$ 相交，所以 $P_{i+1}P_j$ 不过 $P'_{i+1}$ 即 $P_j$ 不在 $s_i$ 上；又 $s_i$ 不是无穷远直线，所以 $s_i$ 仅过一个无穷远点，即 $P'_{i+1}$. 另一方面，过任两点 $P_{i-j}$、$P_{i+j+1}$ 的直线平行于 $P_iP_{i+1}$，过 $P_{i-j}$、$P_{i+j}$ 的直线平行于 $P_{i-1}P_{i+1}$，即 $P_{i-j}$、$P_{i+j+1}$ 与 $P_iP_{i+1}$ 上的无穷远点共线，$P_{i-j}$、$P_{i+j}$ 与 $P_{i-1}P_{i+1}$ 上的无穷远点共线. 因而除了上述 $2k$ 条直线外，其他连结直线都不是 $G$ 直线.

当 $n=4k+2$ 时，作正 $2k+1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{2k+1}$. 点 $P_1$, $P_2$, …, $P_{2k+1}$ 及 $P_iP_{i+1}$($i=1, 2, \cdots, 2k+1$, $P_{2k+1+j}=P_j$)上的无穷远点共 $n$ 个点. 过每两点作直线，这些直线中恰有 $2k+1$ 条 $G$ 直线.

事实上，过 $P_{i+1}$ 及 $P_iP_{i+2}$($P_iP_{i+2}\parallel P_{i-k}P_{i+k+1}$)上无穷远点的直线 $s_i$($i=1, 2, \cdots, 2k+1$)不过正 $2k+1$ 边形的其他顶点，也不过其他的无穷远点，所以 $s_i$ 是 $G$ 直线.

另一方面，$P_iP_j$ 必为正 $2k+1$ 边形的边或与一边平行，因而 $P_iP_j$ 过上述 $n$ 个点中的一个无穷远点. 反之，过 $P_i$ 且

与任一边平行的直线也必过一个顶点 $P_j$, $j\neq i$. 因此只有上述 $2k+1$ 条 $G$ 直线.

上述构造不难在欧氏平面上实现, 以 $n=4k$ 为例. 先在正 $2k$ 边形所在平面 $M$ 外取一点 $A$, 作一个不过 $A$ 的平面 $N$, 连结 $A$ 与 $P_i(i=1, 2, \cdots, 2k)$ 交平面 $N$ 于 $Q_i$, 又过 $A$ 作平面 $M'\parallel M$, $M'$ 交 $N$ 于直线 $a$, 则 $Q_iQ_{i+1}$、$Q_iQ_{i+2}(i=1, 2, \cdots, k)$ 与 $a$ 的交点共 $2k$ 个, 它们与 $Q_i(i=1, 2, \cdots, 2k)$ 共 $n$ 个点. $Q_i$ 与 $Q'_i$($Q_{i+1}Q_{i+2}$ 与 $a$ 的交点)的连线是 $G$ 直线.

平面 $N$ 也可以看作是一个实射影平面, $a$ 就是它的无穷远直线. 在例 6 的后一段中, 我们已经这样做过.

Sylvester 问题有种种推广, 特别是高维空间.

**例 12** 在三维空间中, 任给 $n$ 个不在同一平面的点, 是否必有一个平面, 恰过 3 个已知点?

**解** 答案是否定的. 例如取两条异面直线 $s_1$、$s_2$, 在 $s_1$ 上取 4 个点 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$, 在 $s_2$ 上取 4 个点 $P_5$、$P_6$、$P_7$、$P_8$, 则过其中任三点的平面必过 $s_1$ 或 $s_2$, 从而至少含有 $P_i(1\leqslant i\leqslant 8)$ 中 4 个点.

如果将 $G$ 平面定义为过一条连结直线(上面至少有两个已知点)及线外一已知点的平面, 那么必有一个 $G$ 平面. 即推广是正确的(研究问题 1).

在代数几何中还讨论复射影平面 $CP^2$. 与 $P^2$ 类似, $CP^2$ 中的点也用齐次坐标$(x, y, z)$表示, 其中 $x$、$y$、$z$ 是不全为 0 的复数. 对于非零复数 $k$, $(kx, ky, kz)$ 与 $(x, y, z)$ 表示同一个点. 欧氏平面的许多概念、公式、性质都可以推广到 $CP^2$.

**例 13** 在 $CP^2$ 中任给 $n$ 个点, 不全在一条直线上, 是否必有一条 $G$ 直线?

**解** 答案是否定的，令 $m\geqslant 3$，$\varepsilon$ 为 $m$ 次单位根，考虑 $n=3m$ 个点：

$$P_j(\varepsilon^j,\ -1,\ 0),\ Q_j(0,\ \varepsilon^j,\ -1),\ R_j(-1,\ 0,\ \varepsilon^j)$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

所有的 $P_j$ 在一条直线 $z=0$ 上，所有的 $Q_j$ 在 $x=0$ 上，所有的 $R_j$ 在 $y=0$ 上。

对于满足 $i+j+k\equiv 0 \pmod m$ 的 $i,\ j,\ k(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant m)$，三点 $P_i(\varepsilon^i,\ -1,\ 0)$，$Q_j(0,\ \varepsilon^j,\ -1)$，$R_k(-1,\ 0,\ \varepsilon^k)$ 共线（都在直线 $\varepsilon^k x+\varepsilon^{i+k}y+z=0$ 上）。

因此，过这 $n$ 个点中任两点的直线上都有第三个已知点，不存在 $G$ 直线。

但如果在 $CP^2$ 中给出 $n$ 个不在同一平面的点，那么必有一条 $G$ 直线存在。

Erdös 与 de Bruijn 将例 2 推广至一般的集合，即

**例 14** 设 $\mathscr{P}$ 为 $n$ 元集，$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_m$ 是 $\mathscr{P}$ 的真子集，每个 $s_j$ 至少有两个元素，$\mathscr{P}$ 中任一对元素恰同属于一个 $s_j(1\leqslant j\leqslant m)$，则 $m\geqslant n$。

**证明** 设 $\mathscr{P}=\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n\}$，$P_i$ 属于 $d(P_i)$ 个 $s_j$。考虑一张元素与集合的关系表，如果 $P_i\in s_j$，那么表的第 $i$ 行第 $j$ 列就写上 1．如果 $P_i\notin s_j$，那么表的第 $i$ 行第 $j$ 列就写上 $0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。

如果先算出表中各行的和，再将行和相加，那么表中所有数的和是 $\sum_{i=1}^{n} d(P_i)$．如果先算出表中各列的和，再将列和相加，那么表中所有数的和是 $\sum_{j=1}^{m}|s_j|$．因此

$$\sum_{i=1}^{n} d(P_i)=\sum_{j=1}^{m}|s_j|. \tag{33}$$

由于不含 $P_i$ 的 $s_j$ 共有 $m-d(P_i)$ 个，所以

$$\sum_{P_i\notin s_j}\frac{d(P_i)}{m-d(P_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(P_i)}{m-d(P_i)}\sum_{\substack{P_i\notin s_j\\1\leqslant j\leqslant m}}1$$

$$=\sum_{i=1}^{n}d(P_i),\tag{39}$$

其中 $\sum\limits_{P_i\notin s_j}$ 是对所有 $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$ 并且 $P_i\notin s_j$ 的有序数组 $(i, j)$ 求和. 同样

$$\sum_{P_i\notin s_j}\frac{|s_j|}{n-|s_j|}=\sum_{j=1}^{m}\frac{|s_j|}{n-|s_j|}\sum_{\substack{P_i\notin s_j\\1\leqslant i\leqslant n}}1=\sum_{j=1}^{m}|s_j|.\tag{40}$$

由(38)，(39)，(40)得

$$\sum_{P_i\notin s_j}\frac{d(P_i)}{m-d(P_i)}=\sum_{P_i\notin s_j}\frac{|s_j|}{n-|s_j|}.\tag{41}$$

因为 $s_j$ 是真子集，所以必有一个 $P_i\notin s_j$. $s_j$ 中的每个元素与 $P_i$ 组成 $|s_j|$ 个元素对，每个均含 $P_i$. 这 $|s_j|$ 个元素对恰属于 $|s_j|$ 个不同的子集. 因此对于 $P_i\notin s_j$, 恒有

$$|s_j|\leqslant d(P_i).\tag{42}$$

如果 $m<n$, 那么

$$n-|s_j|>m-d(P_i),\tag{43}$$

由(42)、(43)得

$$\frac{|s_j|}{n-|s_j|}<\frac{d(P_i)}{m-d(P_i)},\tag{44}$$

求和得

$$\sum_{P_i\notin s_j}\frac{|s_j|}{n-|s_j|}<\sum_{P_i\notin s_j}\frac{d(P_i)}{m-d(P_i)}.\tag{45}$$

(45)与(41)矛盾. 这表明恒有 $m\geqslant n$.

在例 14 中，如果 $\mathscr{P}$ 是点集，$s_1$, $s_2$, $\cdots$, $s_m$ 是全部连结直线，并且 $\mathscr{P}$ 中的点不全在一条直线上，那么 $m\geqslant n$ 也就是至少有 $n$ 条连结直线，即例 2. 因此，上面给出了例 2 的另一种

证法.

我们知道,点与线是对偶的(每两点确定一条直线, 每两条直线确定一点),元素与集合也是对偶的,所以例 14 的对偶命题是:

**例 15** 设 $m$ 个集合 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 都是 $n$ 元集 $\mathscr{P}$ 的真子集,每两个恰有一个公共元,则 $m\leqslant n$.

**证明** 证明也是对偶的:

对于任一元 $P_i\in\mathscr{P}$,不含 $P_i$ 的集 $s_j$,与含 $P_i$ 的 $d(P_i)$ 个集各有一个公共元,所以

$$|s_j|\geqslant d(P_i). \tag{46}$$

(如果每个集都含 $P_i$,那么除去单元集 $\{P_i\}$ 外, $m-1$ 个集各有一个不同于 $P_i$ 的元素. 显然 $n\geqslant(m-1)+1=m$.)

与例 14 相同,由集合与元素的关系表得(38), 而后导出(41).

如果 $m>n$,那么

$$n-|s_j|<m-d(P_i). \tag{47}$$

由(46)、(47)得

$$\frac{|s_j|}{n-|s_j|}>\frac{d(P_i)}{m-d(P_i)}. \tag{48}$$

求和得
$$\sum_{P_i\notin s_j}\frac{|s_j|}{n-|s_j|}>\sum_{P_i\notin s_j}\frac{d(P_i)}{m-d(P_i)},$$

与(41)矛盾.

现在讨论一下例 14 中等号在什么时候成立.

显然,这时对一切 $P_i\notin s_j$,均有 $d(P_i)=|s_j|$. 设

$$s_j=\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k+1}\} \quad (k\text{ 为正整数}),$$

则 $\{P_i, Q_1\}, \{P_i, Q_2\}, \cdots, \{P_i, Q_{k+1}\}$ 这 $d(P_i)$ 个二元子集各是 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 中一个含 $P_i$ 的集的子集. 反之 $s_1, s_2, \cdots,$

$s_n$ 中 $d(P_i)$ 个含 $P_i$ 的必各含一个上述形式的二元子集.

$s_1, s_2, \cdots, s_n$ 中任两个集均有公共元. 否则设 $s_1$ 与 $s_j$ 无公共元, 那么有 $P_i \notin s_j$, 并且含 $P_i$ 的集 $s_1$ 不含 $\{P_i, Q_1\}, \cdots, \{P_i, Q_{k+1}\}$ 中任一个, 矛盾. 于是, 两个集有且恰有一个公共元.

如果有某个 $s_j$, $\mathscr{P}$ 中仅有一点 $P_i \notin s_j$, 那么 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 就是例 8 所说的殆线束.

如果对每个 $s_j$, $\mathscr{P}$ 中至少有两个元不属于它, 那么可以证明 $\mathscr{P}$ 中有 4 个元素, 每三个都不在同一个 $s_j$ 中.

假如这一断言不成立, 那么必有一个 $s_j$ 含有(至少)3 个元素 $P_1$、$P_2$、$P_3$.

在 $s_j$ 外至少有两个元素 $P_4$、$P_5$. 根据上面所说, 可设 $\{P_4, P_5\}$ 是 $s_1$ 的子集, 又可设 $s_1 \cap s_j = \{P_1\}$. 这时 $P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$ 中任三个不在同一个 $s_t$ 中.

我们称 $n$ 元集 $\mathscr{P}$ 的元素为"点", 它的子集 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 为"线", $P_i \in s_j$ 为点 $P_i$ 在线 $s_j$ 上或线 $s_j$ 通过点 $P_i$. 如果以下条件

(i) 每两个点恰在一条线上;

(ii) 每两条线恰有一个公共点;

(iii) $\mathscr{P}$中有 4 个点, 任 3 个点不在同一线上

成立, 那么我们就称 $\mathscr{P}$ 与 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 组成一个有限射影平面.

这样, 例 14 中的等号当且仅当 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 是殆线束或者 $\mathscr{P}$ 与 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 成有限射影平面时成立.

关于有限射影平面, 后面(例 29)还会说到.

**注** 如果例 15 中等号成立, 那么 $d(P_i) = |s_j|$ 对 $P_i \notin s_j$ 恒成立. 由于每个含 $P_i$ 的集与 $s_j$ 恰有一个公共元, 所以, 设

$s_j=\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k+1}\}$，则含 $P_i$ 的 $d(P_i)$ 个集必各含一个二元集 $\{P_i, Q_1\}, \cdots, \{P_i, Q_{k+1}\}$、于是，对任一对 $P_i$, $P_i'$. 如果有 $P_i'$ 的集 $s_j$ 不含 $P_i$，那么必有 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 中某个集包含 $\{P_i, P_i'\}$. 即 $\mathscr{P}$ 中任一对元素必恰包含于一个 $s_j$. 从而等号成立的情况与例 14 完全相同.

1821 年，John Jackson 在一本名为《冬天傍晚的推理娱乐》的问题集中提出如下的问题：

要种九棵树，
横斜共十行.
每行须三棵，
有何佳妙方？

1867 年，Sylvester 提出更一般的问题：

平面上 $n$ 个点，每四点不共线，那么恰通过三个已知点的直线至多有多少条？

采用例 9 的记号，即 $t_4=t_5=\cdots=t_n=0$ 时，$\max t_3$ 是多少？

这个问题称为果园问题.

当 $n=3, 4, 5, 6$ 时，不难验证 $\max t_3$ 分别为 1, 1, 2, 4（图 1.17(a), (b), (c), (d)).

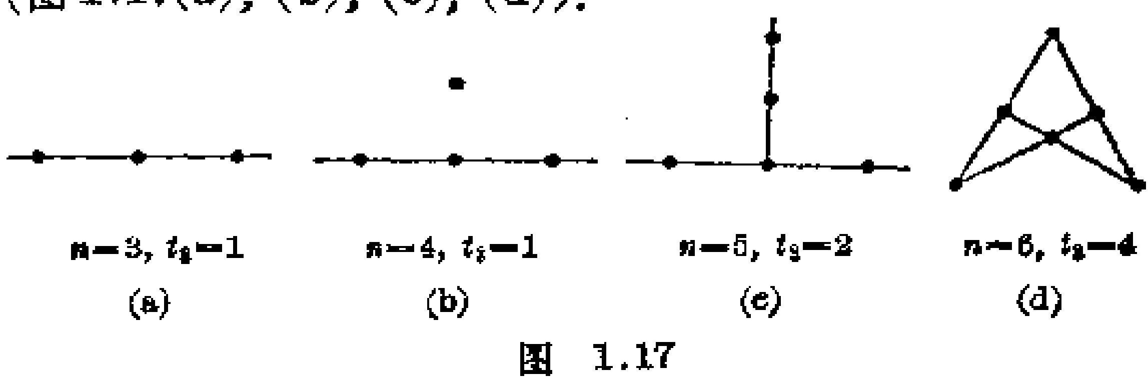



图 1.17

**例 16** $n=7$ 时，$\max t_3=6$.

**证明** 每一点至多引出 3 条 3 直线，因此至多有 $7\times3$ 条

3 直线，这里每条 3 直线被计算 3 次，所以不计重数，至多 $\frac{7\times 3}{3}=7$ 条 3 直线．这时每条连结直线都是 3 直线．但由例 1，2 直线存在．所以不可能每条连结直线都是 3 直线．于是 $t_3\leqslant 6$．

图 1.18 表明 $t_3$ 可为 6．

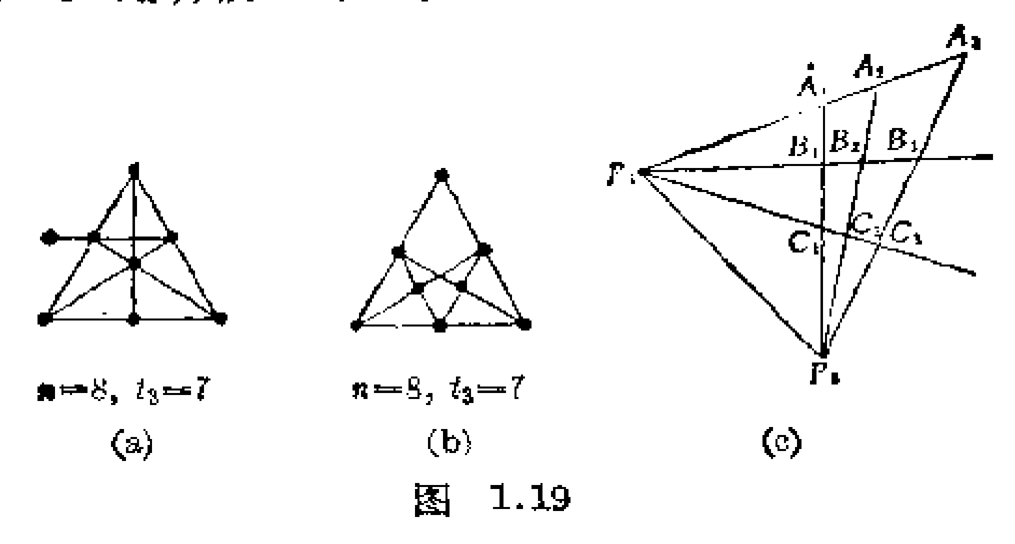
$n=7$，$t_3=6$

图 1.18

**例 17** $n=8$ 时，$\max t_3=7$．

**证明** 图 1.19(a)、(b)表明 $t_3$ 可为7．

另一方面，每点至多引出 3 条 3 直线，因此 3 直线的条数 $t_3\leqslant\frac{8\times 3}{3}=8$．如果 $t_3=8$，那么每点恰引出 3 条 3 直线．设点 $P_1$ 引出的三条线为$\{P_1, P_2, P_3\}$，$\{P_1, P_4, P_5\}$，$\{P_1, P_6, P_7\}$，则 $P_1P_8$ 为 $G$ 直线．$P_8$ 引出 3 条 3 直线与 $P_1$ 引出的 3 条 3 直线交得 9 点 $A_1$、$A_2$、$A_3$、$B_1$、$B_2$、$B_3$、$C_1$、$C_2$、$C_3$，如图1.19(c)所示，其中 $P_1P_8$、$P_1B_3$ 被 $P_1A_3$、$P_1C_3$ 分开，$P_1P_8$、$P_8A_2$ 被 $P_8A_1$、$P_8A_3$ 分开．$A_i$、$B_i$、$C_i$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$这 9 点中应有 6 个为 $\mathscr{P}$ 中点，并且除已有直线外还应有 2 条 3 直线．这 2 条 3 直线只能是$\{A_1, B_2, C_3\}$与$\{A_3, B_2, C_1\}$．但这五点如果在 $\mathscr{P}$ 中，那么第 6 点无法选取(没有 4 直线!)，所以 $t_3\neq 8$．




$n=8$，$t_3=7$

(a)

$n=8$，$t_3=7$

(b)

(c)

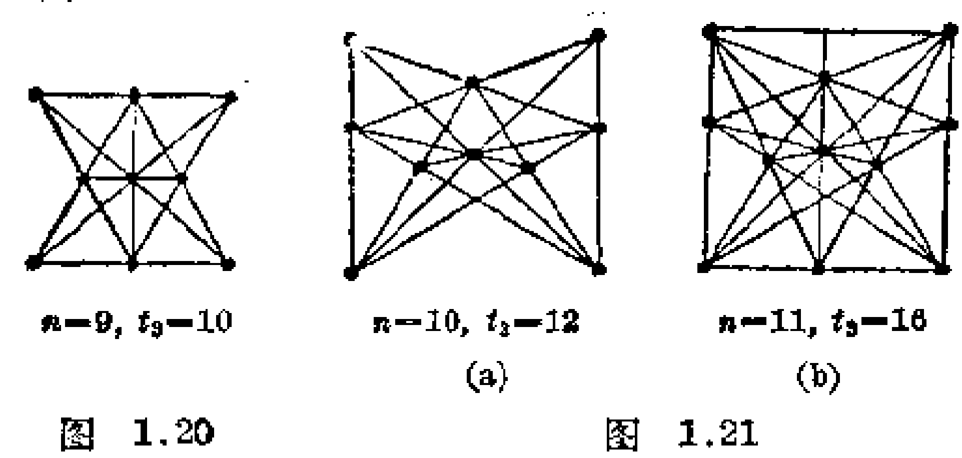
图 1.19

**例 18** $n=9$ 时，$\max t_3=10$.

**证明** 去掉一个点后，由例 17，剩下的 8 点至多连成 7 条 3 直线，因而有一点 $P$ 引出的 3 直线少于 3 条. 在原来的 9 点图中，这点引出的 3 直线至多 3 条. 去掉点 $P$，剩下的 8 点至多连成 7 条 3 直线，因而加入 $P$ 后，至多有 10 条 3 直线.

另一方面，图 1.20 表明 $\max t_3=10$.

在 $t_3=10$ 时，按照上面的推理，每点至少引出 3 条 3 直线. 由 $3\times 10-3\times 9=3$ 可知恰有 3 个 4 重点(显然每点至多引出 4 条 3 直线). 再经过稍细致讨论可知在 $P^2$ 上，$t_3=10$ 的构图只有图 1.20 这一种，而在欧氏平面上有五种(在 $P^2$ 上，直线有点像圆，周而复始，两点之间无顺序，三点之间无介于关系).



$n=9$, $t_3=10$　　$n=10$, $t_3=12$　　$n=11$, $t_3=16$

(a)　　(b)

图 1.20　　图 1.21

图 1.21(a)、(b)列举了 $n=10$, 11 时 $t_3$ 取最大值(分别为 12, 16)的情况. 此外还知道 $n=12$, 16 时，$t_3$ 的最大值分别为 19, 37. 其他情况，$\max t_3$ 尚未定出.

**例 19** 证明 $\max t_3\geqslant\frac{(n-1)^2}{8}$.

**证明** 三次曲线 $y=x^3$ 上任意四点不共线(因为 $y=x^3$ 与任一直线方程消去 $y$ 后得到 $x$ 的三次方程，至多三个实根).

点$(x_i, x_i^3)(i=1, 2, 3)$所成三角形面积的2倍为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).$$

因此，当且仅当 $x_1+x_2+x_3=0$ 时，点$(x_i, x_i^3)(i=1, 2, 3)$共线.

对 $n=2k+1$, 在 $y=x^3$ 上取点

$$(-k, -k^3), (-k+1, -(k-1)^3), \cdots, (0, 0), \cdots, (k, k^3), \tag{49}$$

这 $n$ 个点中每四点不共线. 为使

$$x_1+x_2+x_3=0 \tag{50}$$

成立, $x_1$ 可在 $0, 1, \cdots, k$ 中选取，$x_2$ 可在 $-k, \cdots, -2, -1$ 中选取，共 $k(k+1)$种, 其中 $x_1=-2x_2$ 或 $x_2=-2x_1$ 的(至多 $k$ 种)应予摈弃. 再不顾 $x_1, x_2, x_3$ 的顺序，从(49)中可选出至少

$$\frac{1}{2}(k(k+1)-k)=\frac{k^2}{2}$$

个三点组, 每一组在一条直线上.

对 $n=2k$, 只需在(49)中去掉点$(+k, +k^3)$.

例 19 可以改进.

**例 20** 证明

$$\max t_3 \geqslant \left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1, \tag{51}$$

这里$[x]$表示 $x$ 的整数部分.

**证明** 考虑单位圆

$$x^2+y^2=1.$$

记 $P(\alpha)=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，令直线 $l(\alpha)$为 $P(\alpha)P(\pi-2\alpha)$

$\left(当\ \alpha=\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\ 时, l(\alpha)为切线\right)$. 当且仅当

$$\alpha+\beta+\gamma\equiv 0 \pmod{2\pi} \tag{52}$$

时, $l(\alpha)$、$l(\beta)$、$l(\gamma)$三线共点. 事实上, 在(52)成立时, 有向的弧 $\widehat{P(\alpha)P(\gamma)}+\widehat{P(\beta)P(\pi-2\gamma)}\equiv(\pi-2\gamma)-\beta+\gamma-\alpha\equiv\pi \pmod{2\pi}$, 所以(如图 1.22)$l(\gamma)\perp P(\alpha)P(\beta)$. 同理, $l(\alpha)$、$l(\beta)$、$l(\gamma)$是 $\Delta P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$的三条高, 因此 $l(\alpha)$、$l(\beta)$、$l(\gamma)$交于一点.

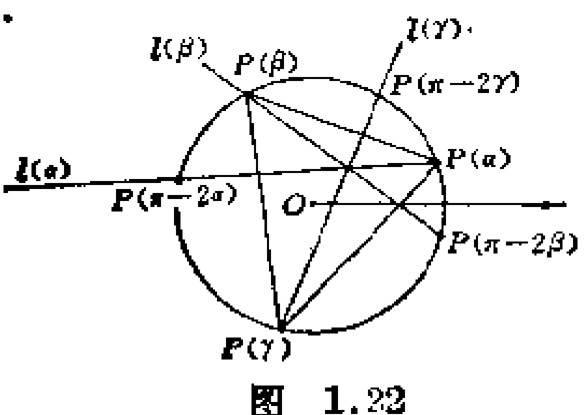



图 1.22

另一方面, 如果 $\gamma'>$(或 $<$)$\gamma$, 那么 $\pi-2\gamma'<$(或 $>$)$\pi-2\gamma$. 当 $P(\gamma')$在图 1.22 的含 $P(\gamma)$的 $\widehat{P(\beta)P(\alpha)}$ 上变动时, 仅在 $\gamma'=\gamma$ 时, $l(\gamma')$通过 $P(\alpha)$、$P(\beta)$的交点.

因为在 $\alpha$、$\beta$ 给定后, 满足(52)的 $\gamma(0\leqslant\gamma<2\pi)$是唯一的, 所以四条不同的直线 $l(\alpha)$, $l(\beta)$, $l(\gamma)$, $l(\delta)$不共点.

$n$ 条直线 $l\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, $i=0, 1, \cdots, n-1$中满足(52)的直线组共有$\left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1$ 个$\Big($因为 $\alpha$、$\beta$ 有 $n(n-1)$种选择, 在 $3\nmid n$ 时, 满足 $\alpha+2\beta\equiv 0$ 及 $2\alpha+\beta\equiv 0 \pmod{2\pi}$的各有 $n-1$, 所以不顾 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 的顺序, 有

$$\frac{n(n-1)-2(n-1)}{6}=\frac{n(n-3)+2}{6}=\left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1.$$

在 $3|n$ 时, $\alpha+2\beta\equiv 0$ 及 $2\alpha+\beta\equiv 0 \pmod{2\pi}$ 的解各有 $n-3$

个，即除去 $\alpha=0$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$．所以有 $\frac{n(n-1)-2(n-3)}{6}=\frac{n(n-3)}{6}+1$ 个）．

于是，我们得到 $n$ 条直线，这些直线的交点中没有 4 重点，有 $\left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1$ 个三重点．

它的对偶图形即 $n$ 个点，每 4 点不共线，并且 3 直线有 $\left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1$ 条．

作对偶图形的方法有很多种，这里顺便介绍一下配极变换．

在图 1.22 中，对平面上任一（不同于 $O$ 的）点 $A$，在射线 $OA$ 上取一点 $A'$，使

$$OA\cdot OA'=1. \tag{53}$$

$A'$ 称为 $A$（关于 $\odot O$）的反演．过 $A'$ 作直线 $a\perp OA$，$a$ 称为 $A$（关于 $\odot O$）的极线，$A$ 称为 $a$ 关于 $\odot O$ 的极点．显然 $A$ 与（不过 $O$ 点的直线）$a$ 是一一对应的．

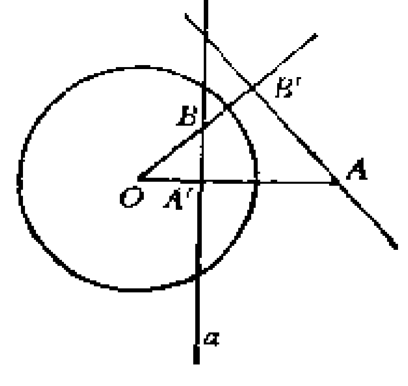



图 1.23

如果 $A$ 的极线 $a$ 通过点 $B$，那么 $B$ 的极线过 $A$．事实上设 $A$、$B$ 的反演分别为 $A'$，$B'$，则 $OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=1$，所以 $A$、$A'$、$B$、$B'$ 共圆，$\angle BB'A=\angle BA'O=90°$，即 $B'A$ 是 $B$ 的极线（图 1.23）．

于是 $n$ 条直线 $l\left(\frac{2i\pi}{n}\right)(i=0, 1, \cdots, n-1)$ 的极点 $Q_i(i=0, 1, \cdots, n-1)$，这 $n$ 个点每 4 点不共线$\Big($如果 4 点 $Q_{i_1}$，$Q_{i_2}$，$Q_{i_3}$，$Q_{i_4}$ 在直线 $a$ 上，则这 4 点的极线 $l\left(\frac{2i_1\pi}{n}\right)$，$l\left(\frac{2i_2\pi}{n}\right)$，

$l\left(\frac{2i_3\pi}{n}\right)$、$l\left(\frac{2i_4\pi}{n}\right)$均过 $a$ 的极点 $A$)，并且在$l\left(\frac{2i_1\pi}{n}\right)$、$l\left(\frac{2i_2\pi}{n}\right)$、$l\left(\frac{2i_3\pi}{n}\right)$共点 $A$ 时，$Q_{i_1}$、$Q_{i_2}$、$Q_{i_3}$一定在 $A$ 的极线 $a$ 上。从而对这 $n$ 个点 $Q_i(i=0, 1, \cdots, n-1)$有

$$t_3 \geqslant \left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1.$$

1868 年，Sylvester 已经证明 $\max t_3 \geqslant \frac{n(n-3)}{6}$. Burr 等人在 1979 年改进为(51). 这与 Sylvester 的结果相同，仅在 $3|n$ 时，增加了 1. Burr 认为"对声名昭著，如 Sylvester 这类人物的结果，即使只是稍为改进一点，也令人极为鼓舞".

猜测(51)中等号成立，但目前上界的最好估计是下面的(54).

**注** 例 20 中，各 $L(\alpha)$的极组成椭圆曲线(即三次曲线，勿与椭圆相混)

$$y^2=4x^3-\frac{1}{12}x-\frac{1}{216}.$$

相比之下，例 19 用的是较简单的三次曲线，因而所得结果不如例 20 精确.

**例 21** 证明在 $n>7$ 且 $n\neq 13$ 时，

$$t_3 \leqslant \left[\frac{n(n-2)}{6}\right]. \tag{54}$$

**证明** 因为 $t_4=0$, 所以连结直线(计及重数)共

$$t_2+C_3^2 t_3=C_n^2 \tag{55}$$

条(其中 3-直线计算 $C_3^2$ 次).

由(37),

$$t_3=\frac{1}{3}(C_n^2-t_2)\leqslant\frac{1}{3}\left(C_n^2-\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{6}n(n-2),$$

因此(54)成立.

**注** 在 $n=19$ 时，已经知道 $t_3\leqslant 24$.

**例 22** 设 $\mathscr{P}$ 为平面上 $n$ 个点的集，这 $n$ 个点不在一条直线上. 证明:

(i) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} t_i=\max(t_2, t_3)$;

(ii) 当 $n\geqslant 25$ 时，$\max(t_2, t_3)\geqslant n-1$;

(iii) 若 $t_2<n-1$，则 $t_3\geqslant\frac{1}{24}n^2-\frac{n}{8}$.

**证明** 由例 9 的(20)即得(i).

设 $n\geqslant 25$，若 $t_2\geqslant n-1$，(ii)已成立，若 $t_2\leqslant n-2$，我们断言 $i\geqslant\left[\frac{3}{4}n\right]$时，$t_i=0$. 不然的话，设直线 $l$ 上点数$\geqslant\left[\frac{3}{4}n\right]$个. 因为在 $l$ 上点数为 $n-1$ 时，显然 $t_2=n-1$. 所以 $l$ 上点数少于 $n-1$，在 $l$ 外至少有两个已知点 $P_1$, $P_2$. 仅限制于 $l\cup\{P_1, P_2\}$时，$P_1$ 与 $l$ 上各点的连线均为 2 直线，至多有一条例外(它过 $P_2$)，$P_2$ 也是如此. 因此 2 直线的条数 $t_2'\geqslant 2\left[\frac{3}{4}n\right]-2$. 回到原来的 $n$ 个点，也就是增添$\leqslant\frac{1}{4}n-2$ 个点. 每一点至多使 2 条 2 直线变为过 3 个或更多个点的直线，因此 $t_2\geqslant t_2'-2\left(\frac{n}{4}-2\right)\geqslant\frac{3}{2}n-4-\left(\frac{n}{2}-4\right)=n$. 矛盾.

于是，由(20)，

$$n-2\geqslant t_2\geqslant 3+\sum_{i\geqslant 4}(i-3)t_i=3+\sum_{\left[\frac{3}{4}n\right]>i\geqslant 4}(i-3)t_i. \tag{56}$$

又与(55)类似

$$t_2+C_3^2t_3+\sum_{i\geqslant 4}C_i^2t_i=C_n^2. \tag{57}$$

令 $C^2_{\frac{3}{4}n-1}=\dfrac{\left(\frac{3}{4}n-1\right)\left(\frac{3}{4}n-2\right)}{2}$. 因为在 $i>4$ 时, $\dfrac{C_i^2}{i-3}$ 随 $i$ 递增, 在 $n>16$ 时, $\dfrac{C^2_{\frac{3}{4}n-1}}{\frac{3}{4}n-4}>\dfrac{C_{11}^2}{8}>\dfrac{C_4^2}{4-3}$, 所以

$$\sum_{i>4}C_i^2t_i\leqslant\frac{C^2_{\frac{3}{4}n-1}}{\frac{3}{4}n-4}\cdot\sum(i-3)t_i$$

$$\leqslant\frac{\left(\frac{3}{4}n-1\right)\left(\frac{3}{4}n-2\right)}{2\left(\frac{3}{4}n-4\right)}(n-5)<\frac{3}{8}(n-1)(n-2). \tag{58}$$

若 $t_3\leqslant n-2$, 则由(57)、(58)得

$$4(n-2)+\frac{3}{8}(n-1)(n-2)\geqslant C_n^2,$$

即

$$n^2-27n+58\leqslant 0. \tag{59}$$

而在 $n\geqslant 25$ 时, (59)不成立。矛盾, 表明(ii)成立。

由(58)、(56)可得

$$n-2+3t_3+\frac{3}{8}(n-1)(n-2)\geqslant C_n^2,$$

即

$$t_3\geqslant\frac{n^2-9n+22}{24}.$$

在例 2 中, $n$ 个已知点至多 $n-1$ 个共线, 连结直线至少 $n$ 条. 更一般地, 我们有

**例 23** 设 $k$ 为定值, 如果 $n$ 个已知点中至多有 $n-k$ 个共线, 那么在

$$n \geqslant \frac{1}{2}(3(3k-2)^2-1) \tag{60}$$

时，连结直线的条数

$$t \geqslant kn - \frac{1}{2}(3k+2)(k-1). \tag{61}$$

即当 $n$ 充分大时，大约有 $kn$ 条连结直线.

**证明** 令 $i$ 重点($i$ 条连结直线通过的点)的个数为 $v_i$，$i$ 直线的条数为 $t_i$，则

$$\sum_{i=2}^{n-1} v_i = n, \tag{62}$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} it_i = \sum_{i=2}^{n-1} iv_i. \tag{63}$$

(在(63)的两边，每条 $i$ 直线均被计算 $i$ 次.)

由(20)、(63)，

$$3t = 3(t_2+t_3+t_4+\cdots) \geqslant 3+2t_2+3t_3+4t_4+\cdots$$
$$= 3+\sum_{i=2}^{n-1} iv_i. \tag{64}$$

如果 $\sum_{i=2}^{3k-1} v_i \leqslant 1$，那么由(64)、(62)，

$$3t \geqslant 3+2\sum_{i=2}^{3k-1} v_i + 3k\sum_{i=3k}^{n-1} v_i \geqslant 3+2+3k(n-1)$$
$$= 3kn-(3k-5),$$

从而(61)成立.

如果 $\sum_{i=2}^{3k-1} v_i \geqslant 2$，那么有两个已知点 $P_1$、$P_2$，每个至多在 $3k-1$ 条连结直线上. 直线 $P_1P_2$ 外的、过 $P_1$ 或 $P_2$ 的直线至多交于 $(3k-2)^2$ 个点. 因为已知点除 $P_1$、$P_2$ 外均与 $P_1$ 或 $P_2$ 连线，所以它们若不是上述交点，则必在直线 $P_1P_2$ 上. 于是 $P_1P_2$ 上至少有 $n-(3k-2)^2$ 个已知点.

设直线 $P_1P_2$ 外恰有 $x$ 个已知点．这些点之间的连线至多 $C_x^2$ 条．这些点与 $P_1P_2$ 上已知点($n-x$ 个)相连得 $x(n-x)$ 条直线，其中相同的至多 $C_x^2$ 条．所以(连同直线 $P_1P_2$)有

$$t \geqslant 1+x(n-x)-C_x^2. \tag{65}$$

由 $x \leqslant (3k-2)^2$ 及(60)，得

$$(k \leqslant) x \leqslant \frac{2n+1}{3} \tag{66}$$

$x$ 的二次函数 $1+x(n-x)-C_x^2$ 在 $x \leqslant \frac{2n+1}{3}$ 时递增，因此在 $x$ 满足(66)时，

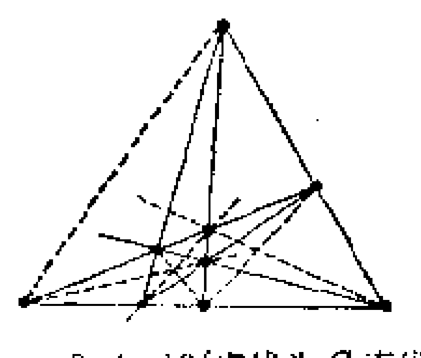
$$t \geqslant 1+k(n-k)-C_k^2 = kn-\frac{1}{2}(3k+2)(k-1).$$

在(61)中令 $k=1$ 得 $t \geqslant n$．令 $k=2$，得 Erdös 的一个猜测：

如果 $n \geqslant 23$，$n$ 个点中至多有 $n-2$ 个共线，那么至少有 $2n-4$ 条连结直线．

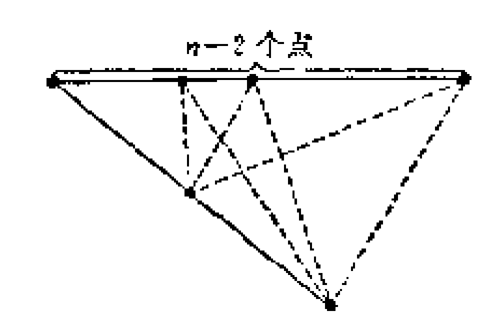
图 1.16(a)、(b)分别为 $n=7$，$t=9$ 及 $n=8$，$t=11$．下面的图 1.24 为 $n=9$，$t=13$．

采用上面的方法，经过稍细致的分析可以证明 $n=7, 8, 9$ 时，上述结果为最佳．即 $n=7, 8, 9$ 时，如果至多 $n-2$ 个点共线，那么 $t \geqslant 2n-5$，并且等号可以成立．



$n=9$，$t=13$(虚线为 $G$ 直线)

图 1.24




$t=2n-4$(虚线为 $G$ 直线)

图 1.25

同样，经过细致的分析，可知 $n=10$ 时，如果没有 9 点共线，那么 $t\geqslant16$，并且等号可以成立. 很可能在 $n\geqslant10$ 时，如果至多 $n-2$ 个点共线，那么

$$t\geqslant 2n-4. \tag{67}$$

图 1.25 表明(67)中的等号均能成立.

前面已经讨论过 $n$ 条直线将 $P^2$ 分成多少个区域. 用 $f_i$ 表示 $i$ 边形的区域，我们有:

**例 24** 如果 $n$ 条直线不通过同一点，那么

$$f_3=4+f_5+2f_6+3f_7+\cdots+2(t_3+2t_4+3t_5+\cdots). \tag{68}$$

**证明** 因为 $n$ 条直线不通过同一点，所以 $f_2=0$，(25)，(27)及

$$v=t_2+t_3+t_4+\cdots, \tag{24'}$$

$$2e=4t_2+6t_3+8t_4+\cdots \tag{26'}$$

成立. 再由欧拉定理

$$v-e+f=1, \tag{23}$$

得
$$4(t_2+t_3+t_4+\cdots)-(4t_2+6t_3+8t_4+\cdots)$$
$$-(3f_3+4f_4+5f_5+\cdots)+4(f_3+f_4+\cdots)=4,$$

即(68)成立.

前面对 $\max t_3$ 进行了估计(例 20、21). 类似地，也可讨论 $\max f_3$ 的值. 1987 年，J. P. Roudneff 证明 $n\geqslant10$ 时，

$$f_3\leqslant\frac{1}{3}n(n-1). \tag{69}$$

另一方面，对于例 20 中的 $n$ 条直线 $l\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$，$i=0,1,\cdots,n-1$，有

$$f_3=\frac{n(n-3)-2s}{3}+6,\quad s=\begin{cases}0, & 若\ 3\mid n;\\ 2, & 若\ 3\nmid n.\end{cases} \tag{70}$$

及 $f_4=n-6+s$, $f_j=0(j\geqslant 5)$.

$n$ 条直线将欧氏平面(不是 $\boldsymbol{P}^2$)分成的区域构成一个两色的地图, 即

**例 25** $n$ 条直线将欧氏平面分成的区域可以用红、黑两种颜色染色, 每个区域一种颜色, 相邻的(即有公共边的)区域颜色不同. 并且任一个区域染好颜色后, 其他区域的颜色也随之确定. 因此, 恰有两种染色的方法.

**证明** 对 $n$ 归纳. $n=1$ 结论显然成立. 假设结论对 $n$ 成立. 在 $n+1$ 条直线的情况, 我们先将一个区域 $D_1$ 染色, 然后撤去一条直线 $l$, 这条直线或这条直线的一部分是 $D_1$ 的边界. 这时, 原来与 $D_1$ 有公共边界的一个区域 $D_2$ 与 $D_1$ 合成一个区域 $D$(图 1.26).

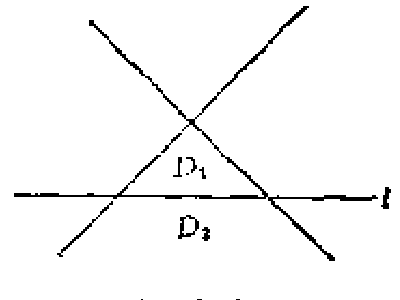


图 1.26

根据归纳假设, 现在的地图可以用唯一的方法染成两色, 其中区域 $D$ 与 $D_1$ 同色. 添上直线 $l$, 在 $l$ 的含 $D_1$ 的一侧, 各个区域保持原来的颜色, 在 $l$ 的另一侧, 将各个区域的颜色改为与原来不同的颜色. 这时整个地图被染成两色. 显然, 整个地图只能这样染色.

通常, 两种颜色的区域个数并不相等. 令 $r$ 为红色的区域数, $b$ 为黑色的区域数. 不妨设 $b\leqslant r$. L. Fejes-Toth 猜测 $r\leqslant 2b$. B. Grunbaum 与 G. J. Simmons 等几乎同时给出了这一猜测的证明.

**例 26** 设 $n(\geqslant 2)$ 条直线中有 $\lambda_i(\geqslant 2)$ 条交于一点($i=1, 2, \cdots, k$), 则

$$r\leqslant 2b-2-\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-2). \tag{71}$$

当 $n$ 条直线互相平行时，(71)在 $n\neq 2, 4$ 时成立.

**证明** 当 $n$ 条直线平行时，$r=b$ 或 $b+1$，结论显然.

以下设 $n$ 条直线不全平行. 令 $r'_j$ 为红色的、有界的 $j$ 边形的个数，$r'$ 为红色的有界区域的个数.

由例 7(18)，共有有界线段

$$s'=-n+\sum\lambda_i$$

条. 每条至多属于一个红色有界区域，所以

$$3r'\leqslant\sum_{j\geqslant 3}jr'_j\leqslant s'=-n+\sum\lambda_i. \tag{72}$$

又由例 5(12)，有界区域共有

$$R'=1+n+\sum(\lambda_i-1)-2n=1-n+\sum(\lambda_i-1) \tag{73}$$

个. 所以黑色的有界区域共

$$b'=R'-r'\geqslant 1-\frac{2n}{3}+\sum\left(\frac{2}{3}\lambda_i-1\right) \tag{74}$$

个. $2n$ 个无界区域颜色交错，所以

$$r=r'+n\leqslant\frac{2}{3}n+\sum\frac{\lambda_i}{3}, \tag{75}$$

$$b=b'+n\geqslant 1+\frac{n}{3}+\sum\left(\frac{2}{3}\lambda_i-1\right). \tag{76}$$

由(75)、(76)得

$$2b-r\geqslant 2+\sum(\lambda_i-2), \tag{77}$$

即(71)成立.

(72)中左边的等号当且仅当 $r'_j=0(j>3)$ 时成立. 右边的等号当且仅当每个有界线段恰属于一个红色有界区域时成立，即红色无界区域都是角. 于是(71)中等号当且仅当红色区域均为三角形(若有界)或角(若无界)时成立.

显然，$n$ 条直线共点即成线束时，$r=b=n$ 使(71)中等号成立. 其他等号成立的情况颇为复杂.

如果 $n$ 条直线处于一般位置，即每两条直线不平行，每三条直线不交于同一点，那么，由(75)、(76)可得

$$\frac{r}{b}\leqslant\frac{2n+\sum\lambda_i}{3+n+\sum(2\lambda_i-3)}=\frac{2n+2C_n^2}{3+n+C_n^2}=2-\frac{6}{3+n+C_n^2}$$

$$=2-\frac{12}{n^2+n+6}.$$

本节所讨论的问题是点与直线的结合关系(或称为关联)，即点是否在直线上，直线是否过点. 度量关系(如长度、角度、面积等)将在以后各节讨论.

也可以讨论其他曲线与点的关系，例如圆与点.

**例 27** 平面上 7 个点，不全在一条直线上，也不全在一个圆上，它们至少能确定多少个圆(即过其中不共线的三点作圆，至少能作出多少个不同的圆)?

**解** 如果其中有 6 点共线，那么共确定 $C_6^2=15$ 个圆.

如果其中有 6 点共圆，那么确定的圆数

$$\geqslant 1+C_6^2-3=13.$$

其中等号成立的情况如图 1.27(a).

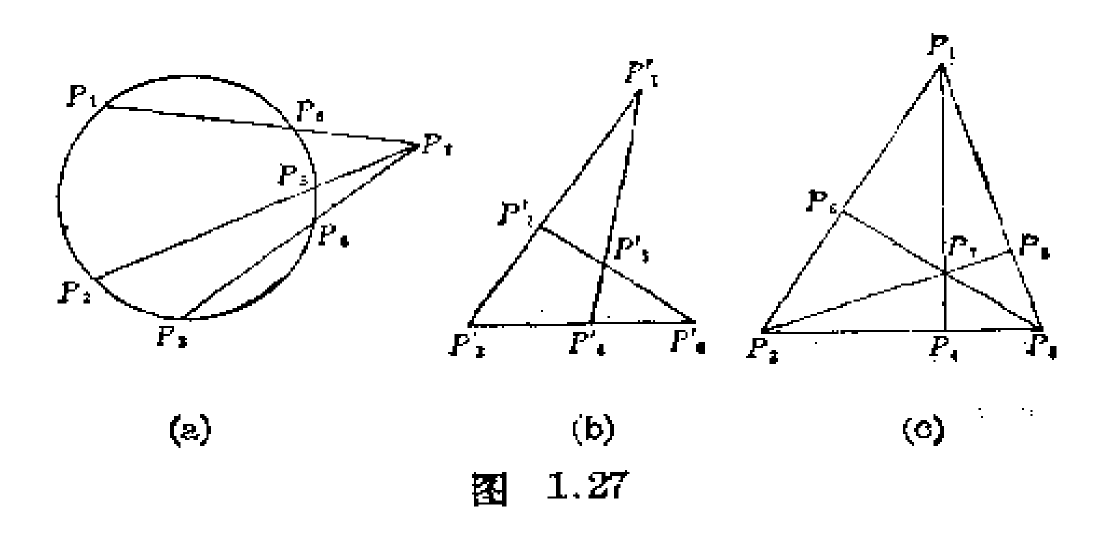



图 1.27

如果其中恰有 5 点共线，那么确定的圆数

$$\geqslant 2C_5^2-2=18.$$

如果其中恰有5点共圆，那么确定的圆数

$$\geqslant 1+2(C_5^2-2)-2=15.$$

设以上情况均不发生．如果有$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$四点共线，那么确定的圆数$\geqslant 3C_4^2\cdot C_3^2\times 2=12$.

设每四点均不共线．由例16，$t_3\leqslant 6$,

$$\text{所以圆的个数}\geqslant C_7^3-6-3h, \tag{78}$$

其中$h$为共圆的四点组的个数．

过每一点$P$至多有4个圆，每个圆过4个已知点（这样的圆简称4圆）．事实上，若两个4圆在$P$相切，则过$P$仅这两个4圆．若每两个过$P$的4圆相交，则另一个交点各不相同．除$P$外仅有$6=C_4^2$个已知点，所以过$P$的4圆不超过4个．

于是，4圆的个数$h\leqslant \dfrac{4\times 7}{4}=7$.

若$h=7$，则过每一点有4个4圆．以$P_7$为反演中心作反演．这时过$P_7$的4个4圆变为4条直线，每条直线上3个点$P_i'$，$P_i'$是$P_i$的反演（图1.27(b)）．不过$P_7$的3个4圆仍为4圆．每个过$\{P_1', P_2', P_3'\}$中两个点，过$\{P_3', P_4', P_6'\}$中两点．于是它们必须过$P_2'$、$P_3'$、$P_4'$、$P_5'$或过$P_1'$、$P_2'$、$P_4'$、$P_6'$，与这样的圆有3个矛盾．

因此$h\leqslant 6$．由(78)得圆的个数$\geqslant C_7^3-6-3\times 6=11$.

图1.27(c)表明圆的个数可为11，其中7个点由$\triangle P_1P_2P_3$的顶点、垂心及高足组成．

于是，圆的个数至少为11.

设平面上$n$个点确定的圆中，单位圆的个数为$f(n)$．我们也可以估计$\max f(n)$.

显然，有上界

$$\max f(n) \leqslant n(n-1). \tag{79}$$

因为过每一对点至多有两个单位圆. 另一方面，有

**例 28** 设 $m$ 满足

$$C_m^2 \leqslant n < C_{m+1}^2, \tag{80}$$

则

$$\max f(n) \geqslant C_m^3. \tag{81}$$

**证明** 任取三个单位向量 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、$\vec{v}_3$. 设已有向量 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\cdots$, $\vec{v}_t$, 使 $\vec{v}_i+\vec{v}_j+\vec{v}_k(1\leqslant i<j<k\leqslant t)$各不相同，取单位向量 $\vec{v}_{t+1}$, 使它与向量 $\vec{v}_i+\vec{v}_j+\vec{v}_k-\vec{v}_{i'}-\vec{v}_{j'}(1\leqslant i<j<k\leqslant t$, $1\leqslant i'<j'\leqslant t)$均不相同. 这样，我们得到 $m$ 个单位向量

$$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \cdots,\ \vec{v}_m, \tag{82}$$

每三个的和各不相同.

于是，$C_m^2$ 个和 $\vec{v}_i+\vec{v}_j(1\leqslant i<j\leqslant m)$也各不相同(若有 $\vec{v}_i+\vec{v}_j=\vec{v}_{i'}+\vec{v}_{j'}$, 则 $\vec{v}_i+\vec{v}_j+\vec{v}_k=\vec{v}_{i'}+\vec{v}_{j'}+\vec{v}_k$). 它们的终点(起点均为原点)是 $C_m^2$ 个不同的点.

每个以 $\vec{v}_i+\vec{v}_j+\vec{v}_k(1\leqslant i<j<k\leqslant m)$的终点(起点均为原点)为圆心的单位圆上，含三个点，即 $\vec{v}_i+\vec{v}_j$、$\vec{v}_j+\vec{v}_k$、$\vec{v}_k+\vec{v}_i$(的终点). 这样的圆有 $C_m^3$ 个，各不相同. 于是(81)成立.

最后，我们谈一谈有限射影平面(定义见例 15).

**例 29** 设有限射影平面 $\pi$ 由点集 $\mathscr{P}=\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ 与直线($\mathscr{P}$ 的子集)$s_1$, $s_2$, $\cdots$, $s_m$ 组成，则有以下性质：

(i) 对任意 $i$、$j(1\leqslant i<j\leqslant m)$, 有 $s_i$ 上的点到 $s_j$ 上的点的一一对应；

(ii) 对任意 $i$、$j(1\leqslant i<j\leqslant n)$, 有过 $P_i$ 的直线与过 $P_j$ 的直线的一一对应；

(iii) 对任意 $i$, $j(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$, 有 $s_j$ 上的点与过 $P_i$ 的直线的一一对应.

证明 (i) 首先证明 $\pi$ 上必有一点 $P$ 不在 $s_i$ 上，也不在 $s_j$ 上. 否则 $\pi$ 上所有的点都在 $s_i$ 或 $s_j$ 上. 由定义，$\pi$ 上有 4 个点 $A$、$B$、$C$、$D$，每三点不共线. 因此可设 $A$、$B$ 在 $s_i$ 上，$C$、$D$ 在 $s_j$ 上. 由定义，直线 $AC$、$BD$ 有交点，这交点既不在 $s_i$ 上，也不在 $s_j$ 上.

设点 $P$ 不在 $s_i$ 上，也不在 $s_j$ 上. 对 $s_i$ 上任一点 $A$，设直线 $PA$ 交 $s_j$ 于 $A'$. 令 $A'$ 与 $A$ 对应. 易知这一对应是一一对应.

(ii) 上面所说的 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点组成的直线 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 中每三条不过同一点. 于是其中至多有两条过 $P_i$，两条过 $P_j$. 因此，或者有一条线既不过 $P_i$ 也不过 $P_j$，或者可设 $P_i=A$, $P_j=C$. 后一种情况，$BD$ 既不过 $P_i$ 也不过 $P_j$.

设直线 $s$ 既不过 $P_i$ 也不过 $P_j$. 对过 $P_i$ 的任一条直线 $t$，设 $t$ 交 $s$ 于 $E$. 令过 $P_j$ 与 $E$ 的直线 $t'$ 与 $t$ 对应. 易知这一对应是一一对应.

显然(ii)与(i)是对偶命题.

(iii) 如果 $P_i$ 不在 $s_j$ 上，对任一过 $P_i$ 的直线 $t$，令 $t$ 与 $s_j$ 的交点与 $t$ 对应. 这对应是一一对应.

如果 $P_i$ 在 $s_j$ 上，在 $s_j$ 外取一点 $O$，过 $P_i$ 的直线与过 $O$ 的直线一一对应，过 $O$ 的直线与 $s_j$ 上的点一一对应. 因此过 $P_i$ 的直线与 $s_j$ 上的点一一对应.

对有限射影平面 $\pi$，若某一条直线上有 $k+1$ 个点，则每条直线上均有 $k+1$ 个点，过每一点均有 $k+1$ 条直线.

设 $O$ 为 $\pi$ 中一点，则过 $O$ 有 $k+1$ 条直线，每条线上除 $O$ 外有 $k$ 个点. 因此 $\pi$ 共有

$$1+k(k+1)=k^2+k+1$$

个点.

同理(对偶地)，$\pi$ 共有 $k^2+k+1$ 条线。

可以证明当 $k$ 为素数的幂时，相应的射影平面存在。例如 $k=2$ 时，$\pi$ 由 7 点 7 线组成，图形如图 1.16(a)，其中已绘出 6 条 3 直线(用实线表示)，第 7 条 3 直线是集$\{P_4, P_5, P_6\}$. 在欧氏平面上无法将它画成通常的直线.

显然，例 1 的结论(Sylvester 定理)在有限射影平面中不成立。

# §2 凸　集

> “这山之高处就叫凸碧；山之低洼近水处，就叫凹晶。这凸、凹二字历来用的人最少，如今直用作轩馆之名，更觉新鲜，不落窠臼”。
>
> ——曹雪芹《红楼梦》第七十六回

如果对于点集 $M$ 中任意两点 $A$、$B$，线段 $AB$ 上的点都属于点集 $M$，那么 $M$ 就称为凸集。

**例1**　设 $O$, $P_1$, $P_2$, $\cdots$, $P_n$ 为任意的 $n+1$ 个点，证明形如

$$\lambda_1\cdot\overrightarrow{OP}_1+\lambda_2\cdot\overrightarrow{OP}_2+\cdots+\lambda_n\cdot\overrightarrow{OP}_n,$$

$$0\leqslant\lambda_i\leqslant1(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1}$$

的向量 $\overrightarrow{OP}$，它的端点 $P$ 所成的集是凸集。

**证明**　设 $A$、$B$ 在这点集 $M$ 中，$\overrightarrow{OA}$ 由(1)表出，$\overrightarrow{OB}$ 是由(1)将 $\lambda_i$ 换为 $\lambda_i'(0\leqslant\lambda_i'\leqslant1)$ 而得到的向量。

线段 $AB$ 上的点 $C$ 即形如

$$\mu\cdot\overrightarrow{OA}+\nu\cdot\overrightarrow{OB}\quad(\mu,\ \nu\geqslant0,\ \mu+\nu=1) \tag{2}$$

的向量 $\overrightarrow{OC}$ 的端点 $C$。由于

$$0\leqslant\mu\cdot\lambda_i+\nu\cdot\lambda_i'\leqslant(\mu+\nu)\max(\lambda_i,\ \lambda_i')$$

$$\leqslant\mu+\nu=1\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

所以 $$\mu\cdot\overrightarrow{OA}+\nu\cdot\overrightarrow{OB}=\sum_{i=1}^{n}(\mu\cdot\lambda_i+\nu\cdot\lambda_i')\cdot\overrightarrow{OP_i}$$

是形如(1)的向量，即 $C\in$ 集 $M$. 于是点集 $M$ 是凸集.

线段、圆(圆盘)都是凸集. 圆周不是凸集.

有界闭集，如果是凸集，那么就称为凸形.

凸多边形(边界及其内部)是凸形，(闭)圆是凸形. 椭圆(边界及其内部)也是凸形，这可以用例1中的方法来证明.

**例2** $n(\geqslant 4)$只乌龟，在地面爬行，如果每只乌龟各沿一个方向爬行，速度的大小都等于 $\nu$. 证明自某一时刻起，乌龟们构成凸 $n$ 边形.

**证明** 乌龟并不从同一点出发，爬行的方向也完全任意，怎样证明它们在某一时刻构成凸多边形呢？

一个好的想法是：如果乌龟在同一个圆周上，那么它们构成凸多边形.

当然，乌龟们不一定能保持高度一致，整整齐齐地排在一个圆周上. 我们只希望它们大致在一个圆周上，略有参差也不要紧.

问题是圆心在哪里？

任取一点作为圆心，只要这点不在已知的 $n$ 个点(乌龟在开始出发时的位置)中每两点的连线上. 这样的连线只有有限多条($\leqslant C_n^2$)，所以我们可以取一点 $O$ 不在这些线上.

乌龟到 $O$ 的距离不全相等，但在乌龟越爬越远时，这些距离之差(与距离本身相比)就越来越小. 当时间足够长时，可以认为它们在同一个 $\odot O$ 上，因而构成凸多边形.

确切些说 $$\frac{\text{乌龟 } T_2 \text{ 与 } O \text{ 的距离}}{\text{乌龟 } T_1 \text{ 与 } O \text{ 的距离}}\to 1,$$

因而 $$\angle OT_2T_1\to\frac{180^\circ-\angle T_1OT_2}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}\angle T_1OT_2.$$

从某一时刻起，$\angle OT_2T_1$ 为锐角．同样，$\angle OT_2T_3$ 也是锐角，

$$\angle T_1T_2T_3=\angle OT_2T_1+\angle OT_2T_3<180^\circ.$$

从某一时刻起，多边形 $T_1T_2\cdots T_n$($T_i$ 为第 $i$ 只乌龟所在位置)的角都小于 $180^\circ$，因而是凸多边形．

例 2 虽然不很复杂，却有几点值得注意：

(i) 它涉及凸多边形．凸性，可以说是组合几何的专利之一．

(ii) 采用了极限的思想方法，在通常的几何中是不常见的．

(iii) 例 1 的解决依赖于一个好的想法(或者叫做好的念头)．这种想法往往借助于直觉(而不纯粹是逻辑)，往往是不精确，甚至是不正确的(乌龟并不"共圆")．但这种粗略的想法(可以精确化，可以修正)恰恰抓住了事物的本质．解组合几何的问题，关键就在于有没有"good idea"．

凸，还有其他的描述方法．例如多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是凸多边形时，过任一顶点 $A_i$ 都可以作一条直线 $l_i$，使得这多边形在 $l_i$ 的同一侧．反过来，具备上述性质的多边形必为凸多边形．

利用这种性质，我们可以得到第二个证明．

对乌龟 $T_1$，设它爬行的方向为 $x$ 轴的正方向，则时间 $t$ 后，它的横坐标为 $x_1+vt$．而乌龟 $T_i$ 的横坐标为

$$x_i+(v\cos\alpha_i)t,$$

其中 $\alpha_i$ 是 $T_i$ 的爬行方向与 $x$ 轴正向所成的角．由于

$$\cos\alpha_i<1,$$

所以当 $t$ 充分大时，

$$x_i+(v\cos\alpha_i)t<x_1+vt\quad(i=2,3,\cdots,n).$$

这表明当 $t$ 充分大时，过 $T_1$ 作直线 $x=x_1+vt$，则 $T_2$，

$T_3$, ⋯, $T_n$ 都在这条直线的同一侧.

对其他顶点(乌龟)可进行同样的讨论. 因此, 这些乌龟组成凸多边形.

第二个证明中过 $T_1$ 的直线 $x=x_1+vt$ 称为凸多边形 $T_1T_2\cdots T_n$ 的支持直线.

一般地, 如果直线 $AB$ 满足下面的两个条件:

(i) $AB$ 与凸形 $M$ 有公共点;

(ii) 凸形 $M$ 的点都在 $AB$ 的同一侧或在 $AB$ 上.

那么 $AB$ 就称为凸形 $M$ 的支持直线(图 2.1(a)).

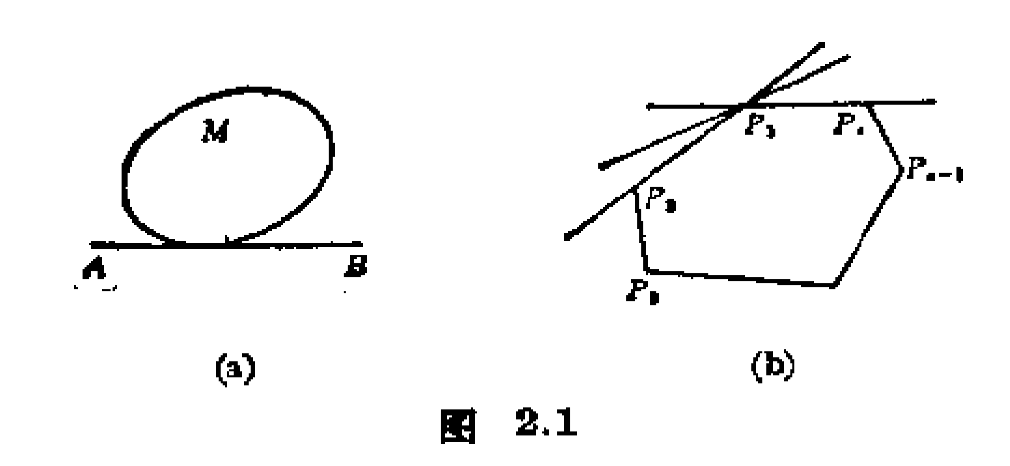



图 2.1

如果一条直线或这直线的一部分是凸形 $M$ 的边界, 那么这条直线就是 $M$ 的支持直线. 例如多边形的边所在的直线是支持直线(图 2.1(b)).

凸形 $M$ 边界的切线是支持直线. 如果在点 $P_1$, 左、右切线不相同, 那么这两条切线及它们所成的一个对顶角内过 $P_1$ 的直线都是支持直线(图 2.1(b)).

任给一方向, 凸形 $M$ 有两条与这方向平行的支持直线. 我们可以将两条平行直线从远处向 $M$ 平移, 直至它们与 $M$ 有公共点. 这时, 两条直线都是支持直线, 而且将 $M$"夹住".

凸形 $M$ 的宽，是两条平行的支持直线间的距离.

所有的宽均相等的凸形称为常宽凸形.

圆是常宽凸形，正三角形不是常宽凸形. 如图 2.2，边长为 1 的正三角形有两个不同的宽，即 1 与 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

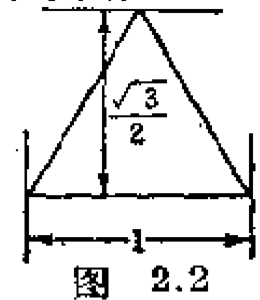


图 2.2

凸形的最大的宽称为直径. 最小的宽称为凸形的宽度.

**例 3** 证明每一个直径为 1 的正多边形都可以被一个宽为 1 的常宽凸形覆盖.

**证明** 在 $n$ 为偶数时，正 $n$ 边形的直径就是它的外接圆的直径. 这个外接圆就是宽为 1 的常宽凸形，它覆盖正 $n$ 边形.

在 $n$ 为奇数时，正 $n$ 边形的直径是它的最长的对角线($n=3$ 时是边长)，小于外接圆的直径. 以每个顶点为心，最长的对角线为半径画圆弧，这圆弧的端点是对边的两个端点. 这 $n$ 条弧围成的图形 $M$ 覆盖正 $n$ 边形.

$M$ 是凸形. 事实上，正 $n$ 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的外接圆 $K$ 是凸形；以 $P_i$ 为心，最长对角线为半径的圆也是凸形($i=1, 2, \cdots, n$). $M$ 是这 $n+1$ 个凸形的交. 由凸形的定义易知，任意多个凸形的交是凸形.

$M$ 是常宽凸形，宽为 1. 事实上，对 $\overset{\frown}{P_kP_{k+1}}\left(k=\frac{n+1}{2}\right)$ 上任一点 $A$，$P_1A=P_1P_k=1$. $\overset{\frown}{P_kP_{k+1}}$ 在 $A$ 点的切线是支持直线，垂直于 $P_1A$. $P_1A$ 在 $P_1P_k$ 与 $P_1P_{k+1}$ 之间(图 2.3)，所以 $P_1A$ 的垂线 $P_1B$ 在对顶角 $\angle CP_1E$ 与 $\angle DP_1F$ 内，这里 $CD$、$EF$ 分别为 $P_1P_{k+1}$、$P_1P_k$ 的垂线. $CD$、$EF$ 分别是 $\overset{\frown}{P_1P_2}$、$\overset{\frown}{P_1P_n}$ 的切线，因而是支持直线. 于是 $P_1B$ 也是支持直线. $P_1A=1$ 是宽

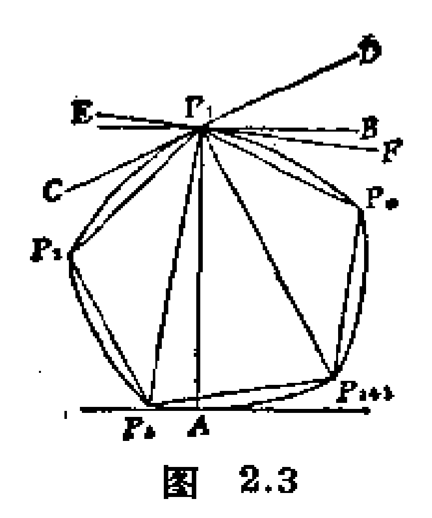



图 2.3

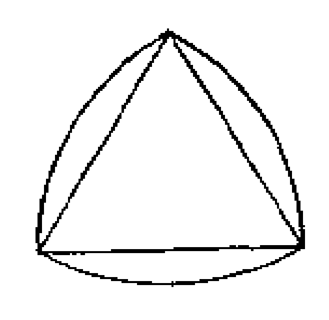


图 2.4

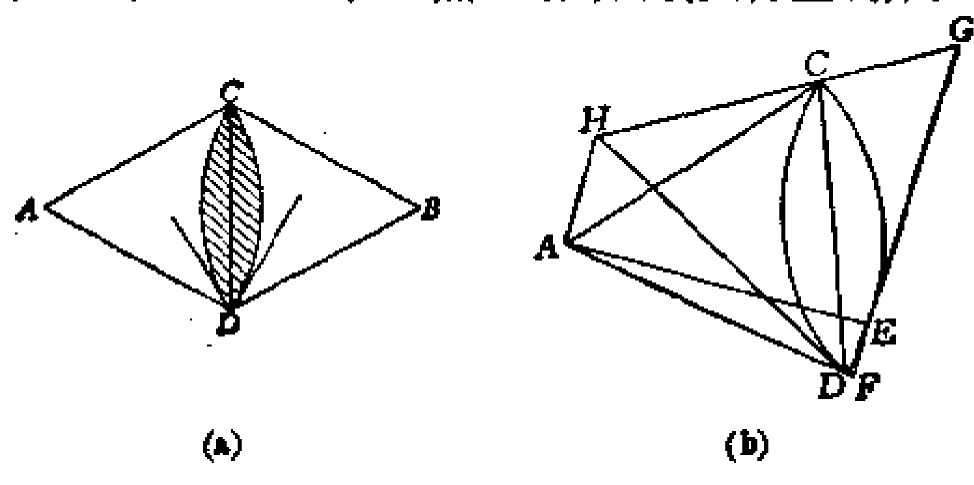
图2.3是对正五边形作的常宽凸形，图2.4是对正三角形作的常宽凸形，分别称为 Reuleaux 五边形与 Reuleaux 三角形.

常宽凸形的外接矩形(由两组平行的支持直线围成)都是正方形，而且这些正方形相等(边长都是常宽凸形的宽). 因此，宽为1的常宽曲线可以在边长为1的正方形内旋转.

**例4** 试作一个可以在正三角形内旋转的凸形(换句话说这一凸形的外接正三角形均相等).

**解** 作两个以 $CD$ 为底的正三角形 $ACD$、$BCD$. 分别以 $A$、$B$ 为圆心，$AC$ 为半径作圆. 两圆的公共部分是一个"凸透镜"(图2.5(a)中阴影部分). 这个"凸透镜"即为所求.

事实上，过 $\overset{\frown}{CF}$ 上任一点 $E$ 作切线(支持直线)，又过 $C$、




(a) (b)

图 2.5

$D$ 作直线与这切线成 $60°$ 角，三条线构成正三角形 $FGH$（图 2.5(b)）.

因为 $\angle CAD=\angle CHD=60°$，所以 $C$、$D$、$A$、$H$ 四点共圆，$\angle AHF=\angle ACD=60°=\angle HFG$，从而 $AH \parallel FG$，$\triangle FGH$ 的高 $=AE=AC$，所以 $\triangle FGH$ 的边长为 $\frac{2}{\sqrt{3}}AC$，即对任一点 $E$，相应的正三角形 $FGH$ 均相等.

图 2.5(b)中，$CD$ 与 $FG$ 所成的角 $\leqslant\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}=30°$，所以 $\angle HDC\geqslant\angle HFG-30°=30°$，同时 $\angle HDC<\angle HFG=60°$. 因此 $HD$ 是凸透镜在 $D$ 点的支持直线. 类似地，$\angle HCD>\angle HGF=60°$，$\angle HCD\leqslant\angle HGF+30°=90°$. 因此 $HC$ 是凸透镜在 $C$ 点的支持直线. $\triangle FGH$ 是凸透镜的外接正三角形.

点集的直径通常定义为点集中两点的最大距离，对于凸形，这与上面所说的定义是等价的.

**例 5** 凸形中两点的最大距离是凸形最大的宽.

**证明** 设 $AB$ 为凸形 $M$ 中的最大距离，过 $A$、$B$ 分别作 $a$、$b$ 垂直于 $AB$. 若 $a$ 上除了 $A$ 外还有 $A'\in M$，则 $A'B>AB$，与 $AB$ 最大矛盾. 因此 $a$ 是 $M$ 的支持直线. 同理 $b$ 也是 $M$ 的支持直线. $AB$ 是凸形 $M$ 的宽，当然也是最大的宽.

对凸形的研究可以采用极坐标. 在凸形内任取一点 $O$ 作为原点，过 $O$ 的一条射线作为极轴，则凸形的边界上每一点 $A$ 可以用一对坐标 $(\rho, \theta)$ 表示. $\theta$ 是射线 $OA$ 与极轴所成的角，$\rho=OA$. $\rho$ 与 $\theta$ 的函数关系 $\rho=\rho(\theta)$ 就是边界（一条封闭的凸曲线）的方程.

更为有用的是支持函数. 对任一方向(设它与极轴所成角为 $\varphi$), 作与它垂直的支持直线, $O$ 到该直线的距离(图 2.6 中的 $OB$)$p=p(\varphi)$ 称为凸形的支持函数.

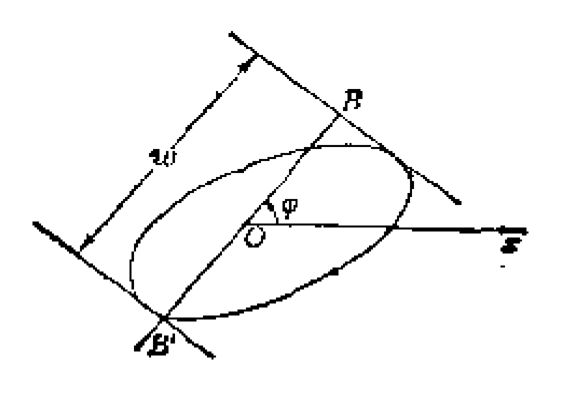



图 2.6

对于常宽凸形, 恒有

$$p(\varphi)+p(\varphi+\pi)=w, \quad (3)$$

其中 $w$ 是宽(图 2.6).

熟悉微积分的朋友不难得出凸形的周长

$$L=\int_0^{2\pi} p\,d\varphi, \tag{4}$$

以及面积等许多重要公式. 特别地, 对常宽凸形, 由(3)、(4)得

$$L=\int_0^{\pi}(p(\varphi)+p(\varphi+\pi))d\varphi=\int_0^{\pi}w\,d\varphi=w\pi. \tag{5}$$

即有 Barbier 定理:

常宽凸形的周长等于宽的 $\pi$ 倍.

我们不准备运用微积分, 因此一大批重要的结果只能割爱. 但 Barbier 定理将在例 16 中给予证明.

三角形是最简单的凸形. 它的宽度(最小的宽)即最小的高. 在凸形中, 三角形具有不少极端性质.

**例 6** 设凸形 $M$ 的周长为 $L$, $\triangle ABC$ 是 $M$ 的外接三角形(即三条边都是 $M$ 的支持直线), 则 $\triangle ABC$ 的宽度

$$w\leqslant\frac{L}{\sqrt{3}}. \tag{6}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形, $M$ 是三条中位线围成的三角形时, 等号成立.

**证明** 设 $BC$ 边最长, $AB$ 边最短, 若 $AC<BC$, 则可在

$CA$ 的延长线上取 $D$ 使 $CD=BC$, 再作与 $DB$ 平行的支持直线, 围成 $\triangle A'B'C$(图 2.7(a)). 显然 $\triangle A'B'C$ 的宽 $w'>w$. 用 $\triangle A'B'C$ 代替 $\triangle ABC$ 进行讨论.

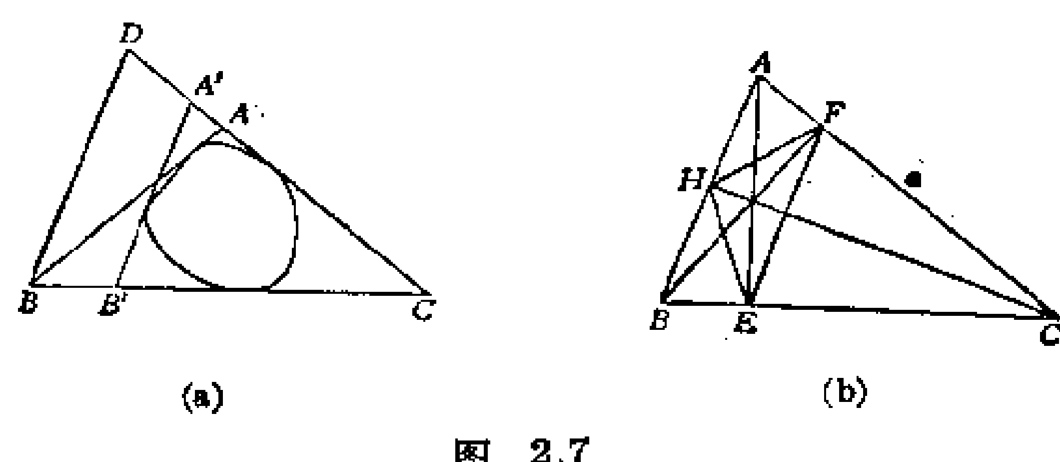



图 2.7

于是, 可设 $BC=AC=a$, $\angle BCA=2\alpha\leqslant 60°$. 又设凸形 $M$ 与三边的公共点分别为 $E$、$F$、$H$(图 2.7(b)), 则

$$L\geqslant EF+FH+HE. \tag{7}$$

熟知(7)的右边在 $E$、$F$、$H$ 为三条高的垂足时, 取最小值. 此时,

$$HE=HB=a\sin\alpha=HF,$$

$$EF=\frac{2\times CE}{CB}\times HB=2\times HB\cdot\cos 2\alpha=2a\sin\alpha\cos 2\alpha,$$

$$w=BF=a\sin 2\alpha.$$

于是

$$\begin{aligned}L&\geqslant 2a\sin\alpha(1+\cos 2\alpha)=2a\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\\&=2w\cos\alpha\geqslant\sqrt{3}\,w,\end{aligned} \tag{8}$$

即(6)成立.

显然当(6)中等号成立时, $\alpha=60°$, 即 $\triangle ABC$ 为正三角形, 而 $M$ 为三条中位线围成的三角形. "仅当"更是显然的.

**例 7** 如果凸形 $M$ 是中心对称的, 其他条件同例 6, 则

$w \leqslant \frac{1}{2}L$. 等号何时成立?

**证明** 如图2.8, 设 $E$、$F$、$H$ 为凸形 $M$ 与 $\triangle ABC$ 的边的公共点, $E$、$F$、$H$ 关于 $M$ 中心的对称点为 $E'$、$F'$、$H'$.

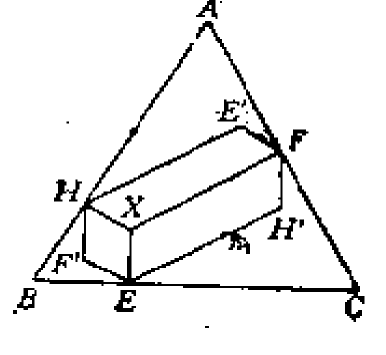


图 2.8

过 $F$、$H$ 分别作 $E'H$、$E'F$ 的平行线, 相交于 $X$, 则四边形 $XFE'H$ 是平行四边形. $XF \mathrel{\underline{\parallel}} HE' \mathrel{\underline{\parallel}} EH'$, 所以四边形 $XFH'E$ 也是平行四边形, $XE \mathrel{\underline{\parallel}} FH'$.

设 $X$ 到 $\triangle ABC$ 三边的距离分别为 $d_1$、$d_2$、$d_3$, 则

$$L \geqslant \text{六边形 } EH'FE'HF' \text{ 的周长}$$
$$= 2(XE + XF + XH) \geqslant 2(d_1 + d_2 + d_3)$$
$$\geqslant \frac{2}{a}(d_1 a + d_2 b + d_3 c) = \frac{2}{a} \times wa = 2w.$$

等号成立时, $\triangle ABC$ 为正三角形, $XE$、$XF$、$XH$ 分别与三边垂直, 凸形 $M$ 是中心对称的六边形 $EH'FE'HF'$.

将一条直线平行移动, 开始时凸形 $M$ 完全在这直线的一侧, 随着移动, 另一侧的面积增加, 直至 $M$ 完全在另一侧. 在这样的移动过程中, 直线必有一个位置, 使凸形 $M$ 的面积被它平分.

**例 8** 证明平分凸形 $M$ 的面积的弦中, 必有一条的长 $\leqslant \sqrt{2M}$, 这里 $M$ 表示凸形 $M$ 的面积(以下均如此).

**证明** 任作一弦平分 $M$ 的面积. 再作一条弦平分 $M$ 的面积, 这条弦垂直于前一条弦.

设这两弦为 $AB = a$, $CD = b$, 则

$$M \geqslant S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab,$$

因此 $$\min(a,b)\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\sqrt{2M}.$$

设平分凸形 $M$ 的弦，长度的最小值为 $l$，例 8 表明

$$l\leqslant\sqrt{2M}. \tag{9}$$

这一结果可以改进为

$$l\leqslant\sqrt{\sqrt{3}M}. \tag{10}$$

猜测

$$l\leqslant\sqrt{\frac{4M}{\pi}}. \tag{11}$$

对于三角形，结果比(11)还好(对于圆，(11)中等号成立).

**例 9** 平分 $\triangle ABC$ 面积的弦中，最短的长度满足

$$l\leqslant\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}S_{ABC}}, \tag{12}$$

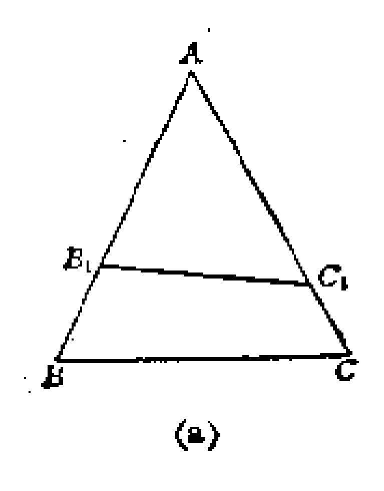
最长的即小边上的中线.

**证明** 设弦 $B_1C_1$ 平分 $\triangle ABC$ 的面积，$B_1$、$C_1$ 分别在 $AB$、$AC$ 上，$AB_1=c_1$，$AC_1=b_1$，$AB=c$，$AC=b$(图 2.9(a)). 由

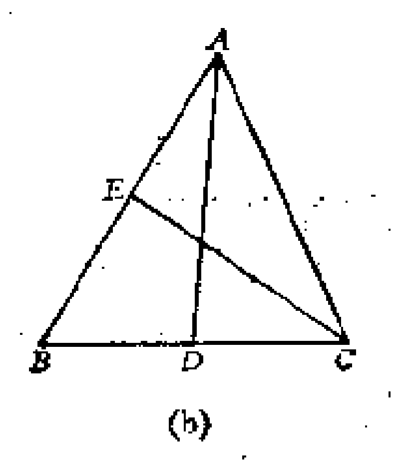
$$S_{AB_1C_1}=\frac{1}{2}S_{ABC}$$

得

$$b_1c_1=\frac{1}{2}bc, \tag{13}$$



(a)



(b)

图 2.9

$$
\begin{aligned}
B_1C_1^2 &= b_1^2+c_1^2-2b_1c_1\cos A\\
&=(b_1-c_1)^2+2b_1c_1-2b_1c_1\cos A\\
&=(b_1-c_1)^2+bc(1-\cos A)\\
&=(b_1-c_1)^2+\frac{1-\cos A}{\sin A}\cdot 2S_{ABC}.
\end{aligned}\tag{14}
$$

于是，在 $b_1=c_1$ 时，$B_1C_1$ 最小．又

$$\frac{1-\cos A}{\sin A}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

是 $A$ 的增函数，所以取 $A$ 为最小的角，得

$$l\leqslant\sqrt{\operatorname{tg}\frac{60^\circ}{2}\cdot 2S_{ABC}}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}S_{ABC}}.$$

另一方面，在 $(b_1-c_1)^2$ 最大时，$B_1C_1$ 最大．此时 $b_1=b$，$c_1=\frac{c}{2}$ 或 $b_1=\frac{b}{2}$，$c_1=c$，即 $B_1C_1$ 成为中线．

由于中线显然平分三角形的面积，并且小边上的中线最长，所以平分三角形面积的最长弦即小边上的中线（图 2.9(b)）．

很多问题涉及两个或多个凸形之间的关系．

**例 10** 包含凸形 $M$ 的，中心对称的凸形中，面积最小的为 $M_1$，则

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{M}{M_1}\leqslant 1.\tag{15}$$

当且仅当 $M$ 为三角形时，左边的等号成立，当且仅当 $M$ 为中心对称时，右边的等号成立．

**证明** 设 $AC$ 为 $M$ 的直径．过 $A$、$C$ 作支持直线．由例 5，支持直线与 $AC$ 垂直．再作与 $AC$ 平行的两条支持直线，设它们与 $M$ 的公共点为 $B$、$D$（图 2.10(a)）．

这四条支持直线组成一个矩形 $K$，$K$ 是包含 $M$ 的中心

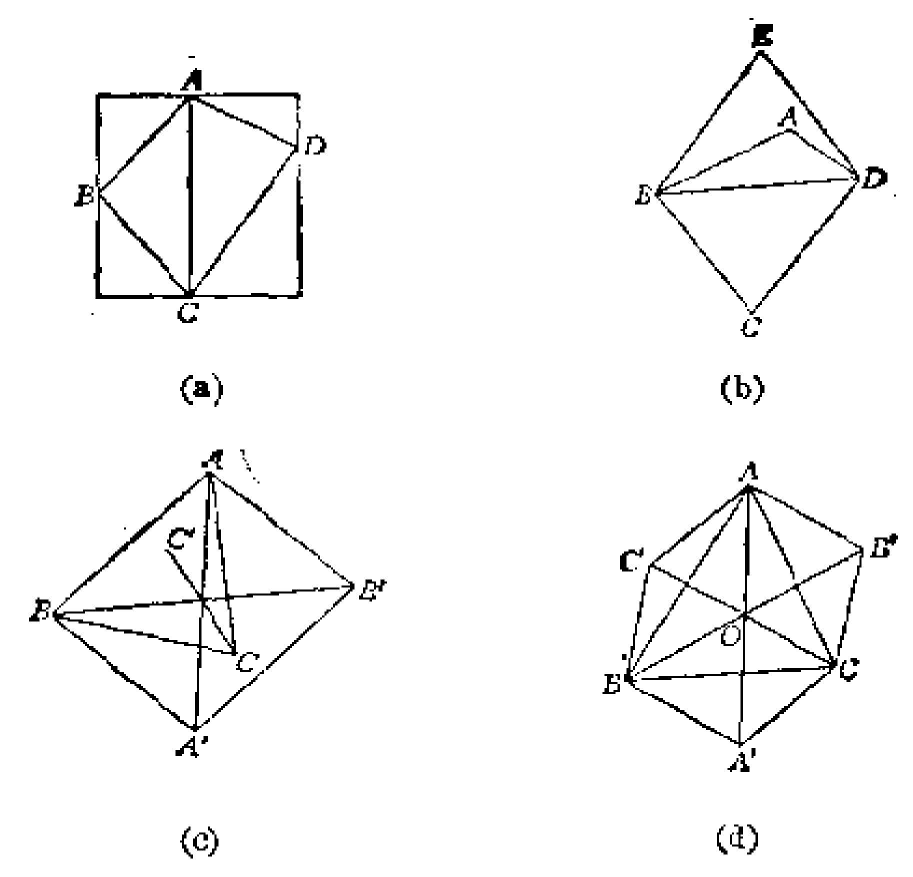


图 2.10

对称的凸形，而且

$$M_1 \leqslant K = AC \times (B\text{、}D\text{ 到 } AC\text{ 的距离之和}) = 2 \cdot S_{ABCD} \leqslant 2M,$$

即(15)左边成立.

若上式中等号成立，则 $M$ 为四边形 $ABCD$(可能退化为三角形). 但对非退化的四边形 $ABCD$，如图 2.10(b)，不妨设 $B$ 到 $CD$ 的距离大于 $A$ 到 $CD$ 的距离，$D$ 到 $BC$ 的距离大于 $A$ 到 $BC$ 的距离. 过 $B$ 作 $CD$ 的平行线，过 $D$ 作 $BC$ 的平行线，两线相交于 $E$，则平行四边形 $BCDE$ 中心对称，包含四边形 $ABCD$，所以

$$M_1 \leqslant S_{BCDE} = 2S_{BCD} < 2S_{ABCD}.$$

因此等号成立时，$M$ 必须为三角形.

对于 $\triangle ABC$，设含它的凸形 $M'$ 以 $O$ 为对称中心，$A$、$B$、$C$ 关于 $O$ 的对称点分别为 $A'$、$B'$、$C'$.

如果 $O$ 不在 $\triangle ABC$ 内部，显然这凸形面积 $M' \geqslant 2S_{ABC}$.

如果 $O$ 在 $\triangle ABC$ 内部，那么由于 $BC' \parallel CB'$，$B'$、$C'$ 两点至多有一点在 $\triangle ABC$ 内，若 $C'$ 在 $\triangle ABC$ 内，则 $B'$ 不在 $\triangle ABC$ 内，同理 $A'$ 也不在 $\triangle ABC$ 内(图 2.10(c))．这时平行四边形 $ABA'B'$ 是包含 $\triangle ABC$ 的凸形，它的面积 $\geqslant 2S_{ABC}$. 更有 $M' \geqslant 2S_{ABC}$.

若 $A'$、$B'$、$C'$ 均不在 $\triangle ABC$ 内，则六边形 $AC'BA'CB'$ 是中心对称的凸形，包含 $\triangle ABC$(图 2.10(d))．由于

$$S_{A'BC} = S_{A'BO} + S_{A'OC} - S_{BOC} = S_{AOB} + S_{COA} - S_{BOC},$$

$$S_{B'CA} = S_{AOB} + S_{BOC} - S_{COA},$$

$$S_{C'AB} = S_{COA} + S_{BOC} - S_{AOB}.$$

所以
$$M' \geqslant S_{AC'BA'CB'} = S_{ABC} + S_{A'BC} + S_{B'CA} + S_{C'AB} = 2S_{ABC}.$$

综上所述，在 $M$ 为三角形时，(15)左边等号成立.

(15)右边的不等式是显然的.

**例 11** 两个相同的矩形有重叠部分．第一个的周长被第二个盖住的部分与第二个的周长被第一个盖住的部分的比为 $q$，证明

$$\frac{1}{3} \leqslant q \leqslant 3. \qquad (16)$$

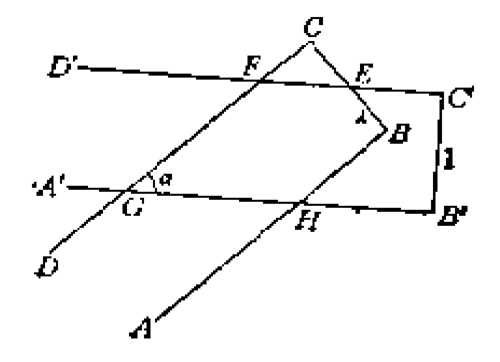



图 2.11(a)

**证明** 如图 2.11(a)，设 $AB$ 与 $A'B'$ 的夹角为 $\alpha$，$BC = 1$，两矩形周长的交点为 $E$、$F$、$G$、$H$．又设 $BE = \lambda$，则

$$GF = GH = \frac{1}{\sin\alpha},$$

$$EF=\frac{GE}{\sin\alpha}=\frac{1-\lambda}{\sin\alpha},$$

$$BH=GF-\lambda\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\lambda\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

从而
$$EF+GH=\frac{2-\lambda}{\sin\alpha},$$

$$GF+BE+BH=\frac{2-\lambda\cos\alpha+\lambda\sin\alpha}{\sin\alpha},$$

$$q=\frac{2-\lambda}{2+(\sin\alpha-\cos\alpha)\lambda}. \tag{17}$$

若 $\alpha\geqslant\frac{\pi}{4}$, 则 $\sin\alpha-\cos\alpha\geqslant0$,

$$q\geqslant\frac{2-\lambda}{2+(\sin\alpha-\cos\alpha)}\geqslant\frac{1}{2+\sin\alpha}>\frac{1}{3}. \tag{18}$$

若 $\alpha<\frac{\pi}{4}$, 则 $c=\cos\alpha-\sin\alpha>0$,

$$q=\frac{1}{c}\cdot\frac{2c-c\lambda}{2-c\lambda}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{2-2c}{2-c\lambda}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{c}\left(1-\frac{2-2c}{2-c}\right)=\frac{1}{2-c}>\frac{1}{2}. \tag{19}$$

由(18)、(19)得 $q>\frac{1}{3}$. 又显然由(17)

$$q\leqslant\frac{2-0}{2-1}=2.$$

于是(16)成立.

注　若(17)作为 $\frac{1}{q}$, 则由于 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{q}\leqslant3$ 即 $\frac{1}{3}\leqslant q\leqslant3$, 所以(16)仍然成立.

两个矩形的位置关系如图 2.11(b)所示, 共有 12 种. 我们仅就其中最复杂的一种给予证明, 其他情况不难仿照上面的证法或直接推出.

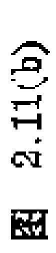


图 2.11(b)

设点集 $M$ 的直径为 $d$, $h \geqslant d$, 称所有包含 $M$ 的、半径为 $h$ 的圆的交集为 $M$ 的 $h$ 包, 记为 $M^*$. 显然 $M^* \supseteq M$.

**例 12** 证明 $M^*$ 的直径与 $M$ 相同.

**证明** 先设 $h=d$. 设 $B$ 为 $M^*$ 中任一点, $A$ 为 $M$ 中任一点. 以 $A$ 为心, $h$ 为半径的圆 $\odot(A, h) \supseteq M$(因为 $h$ 是 $M$ 的直径). 因而 $\odot(A, h) \supseteq M^*$, $AB \leqslant h$.

不等式 $AB \leqslant h$ 对 $M$ 中任一点 $A$ 成立, 所以 $\odot(B, h) \supseteq M$, 因而 $\odot(B, h) \supseteq M^*$. 即 $M^*$ 中任两点 $B$、$C$ 的距离 $\leqslant h$, $M^*$ 的直径 $\leqslant h$.

另一方面, $M^*$ 的直径 $\geqslant M$ 的直径, 所以 $M^*$ 的直径为 $h$.

现在设 $d<h$. 作 $M$ 的 $d$ 包 $M^{**}$. 根据上面所证, $M^{**}$ 的直径为 $d$.

我们证明 $M^{**} \supseteq M^*$. 不然的话, 设 $B \in M^*$, $B \notin M^{**}$. 于是必有一个包含 $M$ 的、半径为 $d$ 的圆 $C_1$ 不含 $B$(图 2.12). 设 $C_1$ 的圆心为 $O_1$. 易知可在 $BO_1$ 的延长线上取一点 $O_2$, 使 $\odot(O_2, h)$ 包含 $C_1$, 不包含 $B$. 但这时 $\odot(O_2, h) \supseteq C_1 \supseteq M$, 从而 $\odot(O_2, h) \supseteq M^*$. 矛盾.

于是 $M^*$ 的直径也必为 $d$.

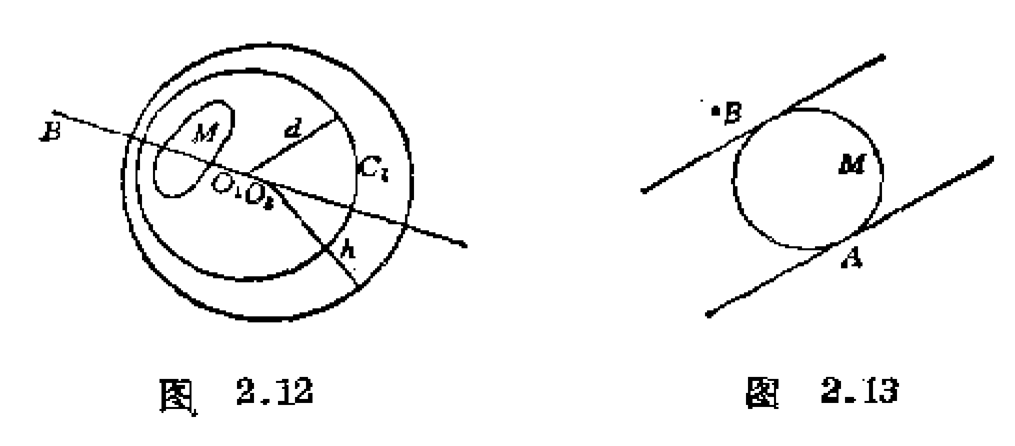



图 2.12　　　　图 2.13

**例 13** 若 $M$ 是常宽凸形, 宽为 $w$, 则 $w$ 包 $M^*=M$.

**证明** $M^*$、$M$ 的直径都是 $w$. 如果有点 $B\in M^*$, $B\notin M$, 作 $M$ 的支持直线将点集 $M$ 与点 $B$ 分开, 再作一条平行的支持直线, 它与 $M$ 有公共点 $A$(图 2.13). 这两条支持直线的距离为 $w$, 而 $M^*$ 的直径$\geqslant AB>w$. 矛盾. 所以 $M^*=M$.

**例 14** 设 $M$ 为常宽凸形, 宽为 $w$, 支持直线 $l$ 与 $M$ 有公共点 $A$. 在含 $M$ 的半平面内, 作半径为 $w$ 的圆与 $l$ 相切于 $A$. 证明这个圆$\supseteq M$(图 2.14(a)).

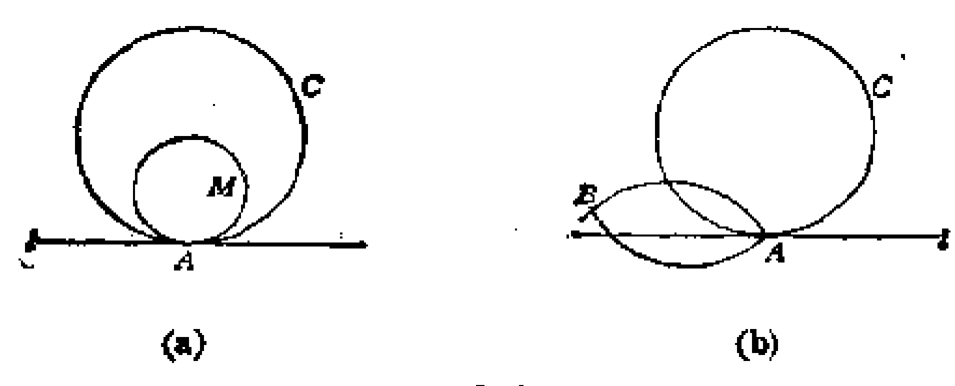



图 2.14

**证明** 由例 13, $M$ 的 $w$ 包$M^*=M$.

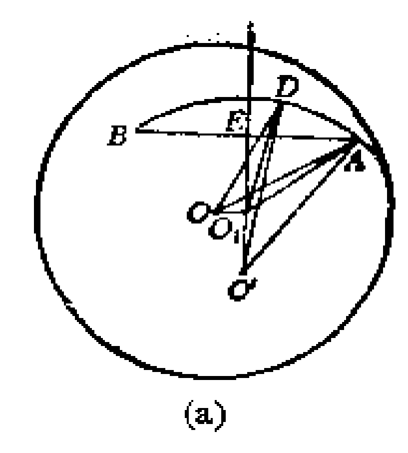
如果所说圆 $C$ 的外面有一点 $B\in M$, 作两个半径为 $w$ 的, 过 $A$ 与 $B$ 的圆, 交成一个"凸透镜"(图 2.14(b)).

易知每一个半径为 $w$ 的、含 $A$ 与 $B$ 的圆一定包含这个凸透镜(注). 而每一个半径为 $w$ 的, 含 $M$ 的圆当然含 $A$ 与 $B$, 所以这样的圆都包含凸透镜. 从而 $M=M^*\supseteq$凸透镜.

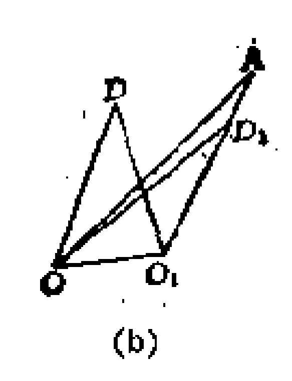
但半径为 $w$ 的, 过 $A$ 与 $B$ 的圆不是圆 $C$, 因而与 $l$ 相交, 凸透镜有一部分在 $l$ 下方(不含 $M$ 的一侧), 这与 $l$ 为 $M$ 的支持直线矛盾.

于是圆 $C\supseteq M$.

**注** 如图 2.15(a), $\odot(O, w)$含 $A$、$B$. $\odot(O', w)$过 $A$、$B$, $O'$与 $O$ 在 $AB$ 同侧. $O'E\perp AB$, $E$ 为垂足. 不妨设




(a)




(b)

图 2.15

$OA \geqslant OB$. 设 $O$ 在 $O'E$ 上的射影为 $O_1$. 由于 $OA \leqslant O'A$, $O_1$ 在 $O'$、$E$ 之间. 对于 $\widehat{AB}$ 上任一点 $D$, 不妨设 $D$ 与 $A$ 在 $O'E$ 同侧(否则用 $D$ 关于 $O'E$ 的对称点代替 $D$). 由于 $\angle O_1O'A \geqslant \angle O_1O'D$, $O'A = O'D$, $O'O_1 = O'O_1$, 所以 $O_1A \geqslant O_1D$. 在 $O_1A$ 上取 $D_1$, 使 $O_1D_1 = O_1D$(图 2.15(b)). 由于 $\angle OO_1A$ 是钝角, 所以 $OA \geqslant OD_1$. 又 $\angle OO_1D_1 \geqslant \angle OO_1D$, $OO_1 = OO_1$, $O_1D_1 = O_1D$, 所以 $OD_1 \geqslant OD$. 于是 $OD \leqslant OA \leqslant w$, 即 $\widehat{AB}$ 全在 $\odot(O, w)$中.

对于任一个平面点集 $M$, 考虑所有包含它的凸集. 这些凸集的交也是凸集, 称为 $M$ 的凸包. 显然凸包是包含 $M$ 的最小凸集. 这一概念是 $h$ 包的自然推广.

如果 $M$ 的直径为 $d$, 那么凸包 $\overline{M}$ 的直径也是 $d$. 否则设凸包 $\overline{M}$ 的直径 $AB = d + 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. 如图 2.16(a), 在 $AB$ 上取 $A_1$, 使 $AA_1 = \varepsilon$, 过 $A_1$ 作直线 $l \perp AB$. 若 $l$ 的含 $A$ 的一侧没有 $M$ 的点, 则 $\overline{M}$ 在 $l$ 的另一侧的部分(包括 $\overline{M} \cap l$在内)包含 $M$ 并且比 $\overline{M}$ 小, 与 $\overline{M}$ 的定义矛盾. 若点 $A' \in M$, $A'$ 与 $A$ 在 $l$ 同侧(图 2.16(b)), 则 $A'B > A_1B = d + \varepsilon$. 因此 $B \notin M$. 在 $AB$ 上取 $B_1$, 使 $A_1B_1 = d$, 过 $B_1$ 作 $l' \perp AB$, 则 $l'$ 的含 $B$ 的一侧没有 $M$ 的点, $\overline{M}$ 在 $l'$ 的另一侧的部分包含 $M$ 并且比 $\overline{M}$ 小, 与 $\overline{M}$ 的定义矛盾.

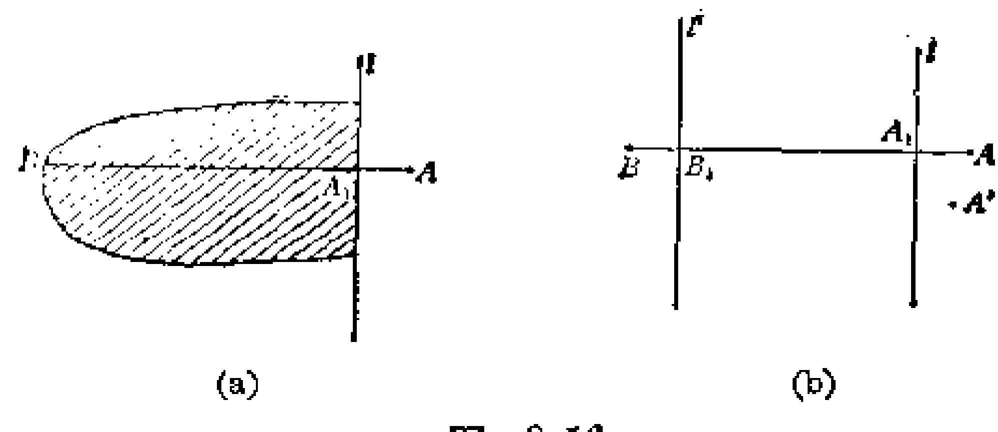



图 2.16

若 $O$ 为凸形 $M$ 外的一点，过 $O$ 作两条支持直线，则 $M\cup\{O\}$ 的凸包由这两条支持直线及 $M$ 的（一部分）边界围成(图 2.17).

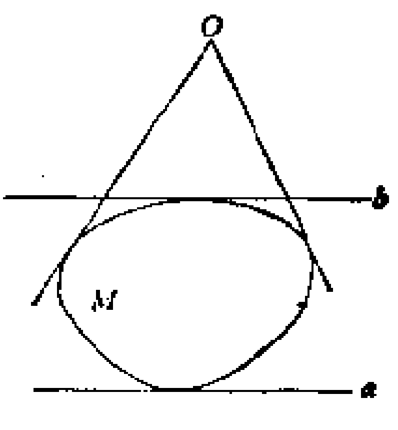



图 2.17

**例 15** 证明每一个直径为 $d$ 的点集，包含在一个宽为 $d$ 的常宽凸形中.

**证明** 考虑所有直径为 $d$ 的、包含已知点集的凸形. 设其中面积最大的为 $M$. 我们证明 $M$ 是常宽凸形.

如果 $M$ 不是常宽凸形，那么必有两条平行的支持直线 $a$、$b$ 将 $M$ 夹住，而 $a$、$b$ 间的距离小于 $d$(图 2.17).

任取一与 $a$ 距离为 $d$ 的点 $O$($O$ 与 $b$ 在 $a$ 的同侧)作 $M\cup\{O\}$ 的凸包如图 2.17. 该凸包的最大宽为 $d$，因而直径为 $d$. 它的面积大于 $M$ 的面积，矛盾！

**注** 这些凸形的面积有最大值，在直观上是显然的. 严格说来，面积有上确界 $S$，因而有一串凸形，面积趋于 $S$. 然后根据著名的 Blaschke 定理："如果无穷的凸形都含在一个圆中，那么可以选出一个收敛子列，收敛于一个凸形"，这串凸形(它们都在一个圆心属于已知点集，半径为 $d$ 的圆中)有一

收敛子列，收敛于凸形 $M$。显然 $M$ 的面积即为 $S$。而且 $M$ 包含已知点集，直径为 $d$。

现在我们用初等方法证明 Barbier 定理，即

**例 16** 常宽凸形的周长等于 $\pi w$，$w$ 是它的宽。

**证明 1** 首先证明一个简单的引理：

**引理** 距离为 $w$ 的两条平行线交菱形 $ABCD$ 的边于 $E$、$F$、$G$、$H$（图 2.18），则 $AE+EF+FC+CG+GH+HA$ 为定长。

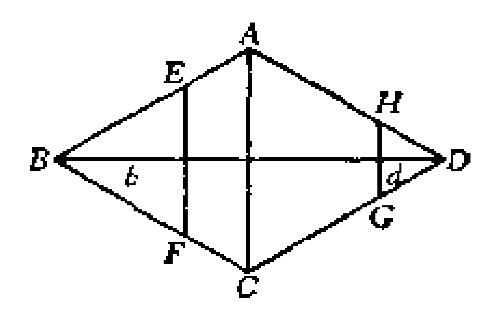


图 2.18

**证明** 设 $B$、$D$ 到 $EF$、$GH$ 的距离分别为 $b$、$d$，$BD=2k$，$AC=l$，$AB=a$，则 $b+d+w=2k$，

$$EF+GH=\frac{b}{k}l+\frac{d}{k}l=\frac{2k-w}{k}l,$$

$$AE+AH=\frac{k-b}{k}a+\frac{k-d}{k}a=\frac{w}{k}a,$$

从而六边形 $AEFCGHA$ 的周长为定值 $\dfrac{2k-w}{k}l+\dfrac{2w}{k}a$。

现在设 $M$ 是宽为 $w$ 的常宽曲线，$C$ 是宽（直径）为 $w$ 的圆。我们证明它们的周长相等。为此，作它们的外接 $2^n$ 边形，证明两者的周长相等，再令 $n\to+\infty$ 即得结果。

当 $n=2$ 时，两者的外接正方形的边长都为 $w$。假设 $M$ 与 $C$ 各有一个等角的外接 $2^n$ 边形，周长相等（图 2.19）。

考虑两条邻边 $BE$、$BF$ 及对边 $DG$、$DH$，延长它们得一平行四边形 $ABCD$。该平行四边形的对边之间的距离都是 $w$，因而是一菱形。作与 $AC$ 平行的两条支持直线，这两条支持直线间的距离为 $w$，由引理，截得的六边形周长为定值。于是 $EF+GH-(DG+DH+BE+BF)$ 为定值。

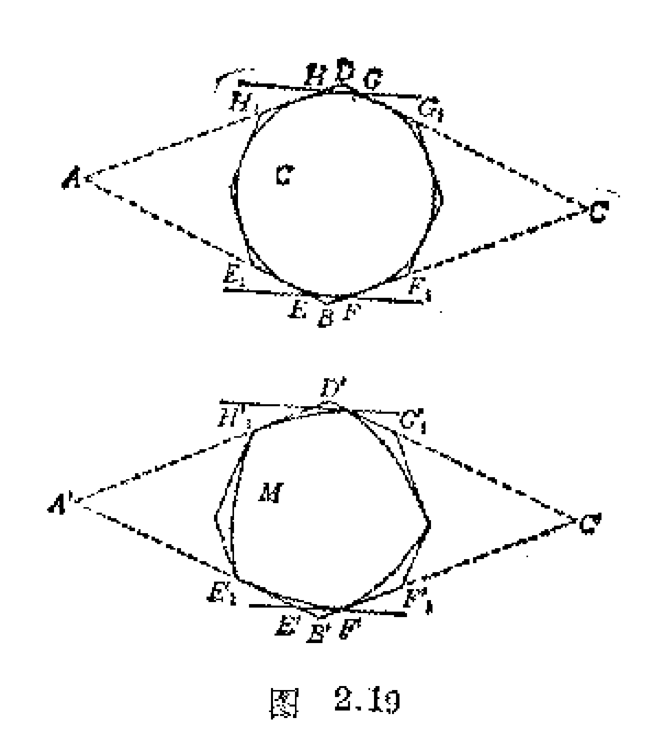



图 2.19

对另一个 $2^n$ 边形作同样的处理. 由多边形是等角多边形(我们可以使两个 $2^n$ 边形的边互相平行)及对边距离为 $w$, 相应的菱形 $A'B'C'D'$ 与 $ABCD$ 全等, 从而 $E'F' \parallel EF$, 并且各切去两个角($B$、$D$、$B'$、$D'$ 的角)后, 所得多边形的周长相等.

用上面的方法在每个顶点处切去一个角, 得到两个等角的 $2^{n+1}$ 边形, 分别外接于 $C$ 与 $M$, 周长相等.

**证明 2** 任取一点 $O$ 作为原点, 对于点集 $M_1$、$M_2$, 记所有形如

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2},\quad A_1\in M_1,\ A_2\in M_2 \tag{20}$$

的向量 $\overrightarrow{OA}$ 的端点 $A$ 所成的集为 $M_1+M_2$.

不难证明以下事实(请读者作为练习):

(i) 若 $M_1$、$M_2$ 为凸形, 则 $M_1+M_2$ 也是凸形.

(ii) 若 $l_1$、$l_2$ 是平行线(线段), 则 $l_1+l_2$ 是与 $l_1$ 平行的直线(线段), 并且 $O$ 到 $l_1+l_2$ 的距离等于 $O$ 到 $l_1$、$l_2$ 的距离的(代数)和. 在 $l_1$、$l_2$ 是线段时, $l_1+l_2$ 的长即为这两条线段长度的和.

(iii) 若 $l_1 /\!/ l_2$ 分别为凸形 $M_1$、$M_2$ 的支持直线，并且 $M_1$、$M_2$ 分别在 $l_1$、$l_2$ 的下方，则 $l_1+l_2$ 是 $M_1+M_2$ 的支持直线，并且 $M_1+M_2$ 在 $l_1+l_2$ 的下方.

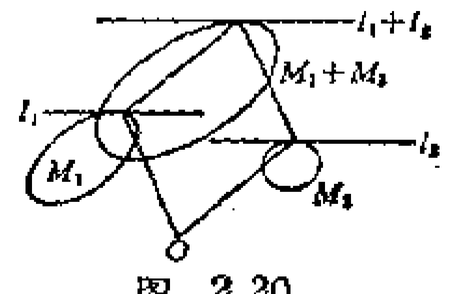



图 2.20

由(ii)、(iii)，若 $l_1 /\!/ l_1'$ 是 $M_1$ 的支持直线，$l_2 /\!/ l_2'$ 是 $M_2$ 的支持直线，则 $(l_1+l_2) /\!/ (l_1'+l_2')$ 是凸形 $M_1+M_2$ 的支持直线，并且 $l_1+l_2$ 与 $l_1'+l_2'$ 间的距离等于 $l_1$ 与 $l_1'$ 的距离及 $l_2$ 与 $l_2'$ 的距离的和，从而 $M_1+M_2$ 在任一方向的宽等于 $M_1$、$M_2$ 在相应方向上的宽的和.

现在我们证明一个引理，它本身也是很有趣的.

**引理** 设凸形 $M$ 与 $M'$ 关于原点 $O$ 中心对称，则当且仅当 $M+M'$ 是以 $O$ 为心的、半径为 $w$ 的圆时，$M$ 是宽为 $w$ 的常宽凸形.

**证明** 设 $M$ 是宽为 $w$ 的常宽凸形，则 $M+M'$ 在任一方向的宽等于 $2w$. 因为 $M$、$M'$ 关于 $O$ 对称，所以 $M+M'$ 关于 $O$ 对称. 从而 $M+M'$ 的任一支持直线与 $O$ 的距离为 $w$，这也就是 $O$ 与支持点(支持直线与 $M+M'$ 的公共点. 对于等宽凸形，每条支持直线上恰有一个支持点)的距离. 因此 $M+M'$ 是 $\odot(O, w)$.

反之，设 $M+M'$ 是 $\odot(O, w)$，则在任一方向上，$M$ 与 $M'$ 的宽都是 $\frac{2w}{2}=w$.

利用引理，由常宽凸形 $M$ 及 $M'$ 作出

$$M+M'=\odot(O, w).$$

设 $M$ 的外接等角 $n$ 边形为 $P_n$，$P_n$ 关于 $O$ 中心对称得 $P_n'$，则 $P_n+P_n'$ 是 $\odot O$ 的外切正 $n$ 边形. 由(ii)，$P_n+P_n'$ 的周长是

$P_n$ 的周长的 2 倍. 令 $n \to +\infty$ 即得 $M$ 的周长为 $\odot O$ 周长的 $\frac{1}{2}$.

Helly 定理是凸集中应用最多的定理.

**Helly 定理** 如果一组凸形中每三个有公共点，那么这组凸形有公共点.

定理中的凸形也可以改为凸集，但这时必须限制凸集的个数是有限多个.

Helly 定理的证明及一些应用在拙著《覆盖》(上海教育出版社 1983 年出版)中业已介绍，这里不再重复.

**例 17** 设 $M$ 为凸形. 证明 $M$ 中存在一点 $G$，使得每一条过 $G$ 的弦被 $G$ 分成的两部分都不小于这弦的 $\frac{1}{3}$.

**证明** 对 $M$ 中每一点 $A$，以 $A$ 为心，$\frac{2}{3}$ 为相似比作位似变换，将 $M$ 变为位似形 $M_A$. $M_A$ 当然是凸形.

任三个这样的位似形 $M_A$、$M_B$、$M_C$ 必有公共点，事实上 $\triangle ABC$ 的重心就是它们的公共点.

根据 Helly 定理，这些凸形 $M_A$ 有公共点 $G$.

每一条过 $G$ 的弦 $AB$，由 $G \in M_A$ 得 $AG \leqslant \frac{2}{3}AB$，从而 $GB \geqslant \frac{1}{3}AB$. 同样，由 $G \in M_B$ 得 $GA \geqslant \frac{1}{3}AB$.

**例 18** 设 $M$ 为有界图形，面积为 $M$. 证明存在一点 $G$，使得每条过 $G$ 的直线将 $M$ 分成两部分，每一部分的面积不小于 $\frac{1}{3}M$.

**证明** 考虑所有含 $M$ 的面积超过 $\frac{2}{3}M$ 的闭半平面(包括边界直线的半平面).

闭半平面不是凸形，不能直接利用 Helly 定理．但我们可用一个大圆覆盖 $M$． 这个大圆与闭半平面的公共部分是一个弓形，它含 $M$ 的面积超过 $\frac{2}{3}M$．

每三个这样的弓形有一个属于 $M$ 的公共点$\left(\text{因为每个弓形之外含 } M \text{ 的面积小于 } \frac{1}{3}M\right)$． 根据 Helly 定理，全体弓形有一个公共点 $G$．

若某条过 $G$ 的直线 $l$ 将 $M$ 分成的两部分中，有一部分面积$<\frac{1}{3}M$，则另一部分的面积$>\frac{2}{3}M$．将 $l$ 向这一部分稍稍平移产生一个闭半平面，所含 $M$ 的面积$>\frac{2}{3}M$，但它不含 $G$(图 2.21)，与 $G$ 的定义矛盾．

**注** $\frac{1}{3}$ 不能再改善，例如 $M$ 由三个相等的、两两外离的圆组成．但对凸形，$\frac{1}{3}$ 可改进为 $\frac{4}{9}$．

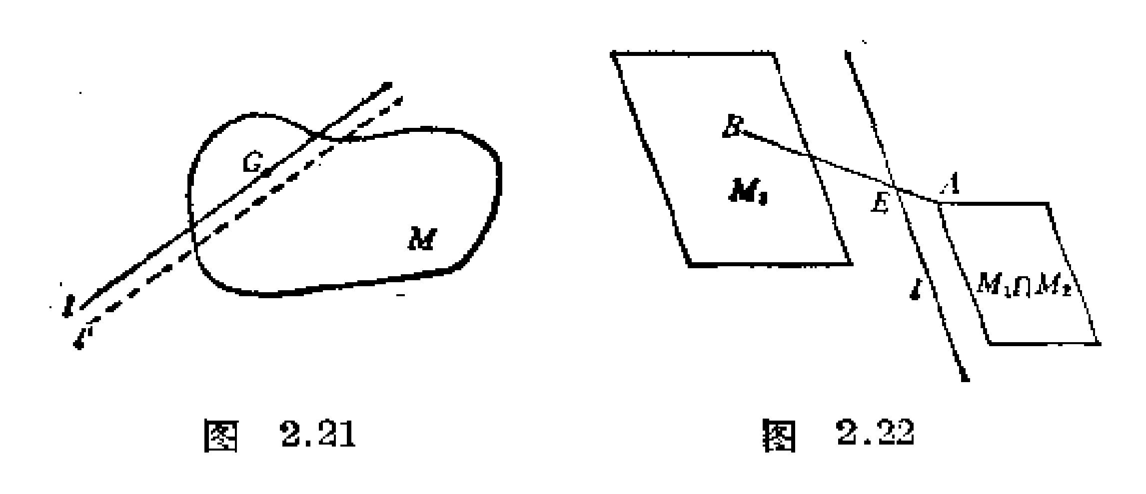



图 2.21　　　　图 2.22

**例 19**　将平行四边形 $M$ 平移得到平行四边形 $M_1$, $M_2$, …, $M_k$．如果 $M_1$, $M_2$, …, $M_k$ 中每两个有公共点，证明这 $k$ 个平行四边形有公共点．

**证明**　只需证明 $M_1$, $M_2$, …, $M_k$ 中每三个的交非空．

假设 $M_1\cap M_2\cap M_3$ 为空集，那么 $M_1\cap M_2$ 与 $M_3$ 没有公共点. 由于 $M_1\cap M_2$ 也是平行四边形，边与 $M_3$ 的边平行，我们可以作一条与边平行的直线 $l$ 将 $M_1\cap M_2$ 与 $M_3$ 分开(图 2.22).

在 $M_3$ 中取点 $B\in M_1$(因为 $M_1$、$M_3$ 有公共点)，在 $M_1\cap M_2$ 中取 $A$. $A$、$B$ 被 $l$ 分开，所以线段 $AB$ 与 $l$ 有公共点 $E$. 因为 $M_1$ 为凸集，$A$、$B\in M_1$，所以 $E\in M_1$，$l$ 与 $M_1$ 有公共点. 同理 $l$ 与 $M_2$ 有公共点.

将 $M_1$、$M_2$、$M_3$ 的平行于 $l$ 的边作为直线，产生三个带形 $M_1'$、$M_2'$、$M_3'$. $M_1'\cap M_2'$ 也是带形，边即 $M_1\cap M_2$ 的平行于 $l$ 的边(直线)，并且 $l$ 将带形 $M_1'\cap M_2'$ 与 $M_3'$ 分开.

由于 $l$ 与 $M_1$ 有公共点，所以 $l$ 含于 $M_1'$ 中. 同理 $l$ 含于 $M_2'$ 中，于是 $l$ 含于 $M_1'\cap M_2'$ 中. 但这样 $l$ 就不能将 $M_3'$ 与 $M_1'\cap M_2'$ 分开. 矛盾.

例 19 是平行四边形的一个特性. 如果凸形 $M$ 不是平行四边形，那么总可将 $M$ 平移得到三个全等的凸形 $M_1$、$M_2$、$M_3$，每两个有公共点，但 $M_1\cap M_2\cap M_3$ 为空集. 证明需利用有关光照的一个定理，参见拙著《覆盖》第 57 页.

**例 20** 如果一个画廊中，任意三点都能被站在一个适当位置的警卫看到，那么必有一个位置，警卫可从这里看到整个画廊(换句话说，一名警卫就足够了).

**证明** 这是 Krasnosel'skii 发现的定理.

画廊指一个平面有界闭集，不一定是凸的(图 2.23(a)).

点集 $M$ 中的点 $A$ 能看到 $B$ 即指线段 $AB$ 上的点均属于 $M$.

设 $A\in M$，用 $V_A$ 表示 $A$ 所能见到的点的集合. $V_A$ 不一定是凸的，因此不能直接应用 Helly 定理.

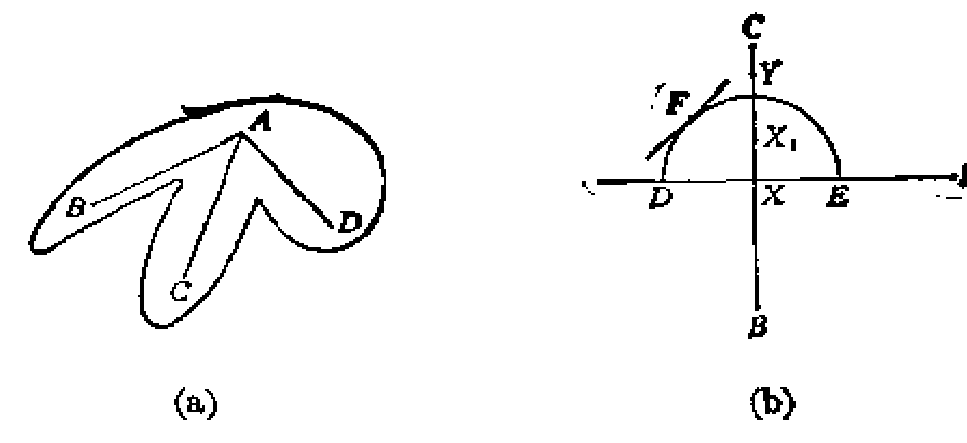



图 2.23

考虑$V_A$的凸包$V'_A$. 对于$M$中任意三点$B$、$C$、$D$, 有一点$A$可以看见它们, 所以$V_B \cap V_C \cap V_D$非空, 更有$V'_B \cap V'_C \cap V'_D$非空.

因为每三个凸形$V'_B$、$V'_C$、$V'_D$的交非空, 根据Helly定理,

$$\bigcap_{A \in M} V'_A \neq \phi. \tag{21}$$

我们证明

$$\bigcap_{A \in M} V_A = \bigcap_{A \in M} V'_A. \tag{22}$$

假设(22)不成立, 必有点$B \in \bigcap_{A \in M} V'_A$、而$B \notin V_C$, $C$为$M$中一点、于是线段$CB$上必有一点$X \notin M$(图2.23(b)).

过$X$作直线$l \perp CB$. 在闭上半平面($l$的含$C$的一侧, 包含$l$在内), 有界闭集$M$的边界上有一点$F$与$X$距离最近, 以$X$为心, $XF$为半径作半圆, 这个半圆的直径$DE$在$l$上. 如果$F$不是$D$、$E$, 那么$V_F$必在过$F$所作切线界定的闭半平面内, 这个闭半平面不含$B$(因为$FB$穿过所作半圆). $V'_F$也在这个闭半平面内, 因而不含$B$. 与$B$的定义矛盾.

如果$F$是$D$(或$E$)，设线段$XO$与$M$的边界相交于$Y$(若有多个交点，设$Y$距$X$最近)，$Y$在半圆外. 将$X$换为$X_1\in XY$，$XX_1=\frac{1}{2}XF$，进行同样的讨论，相应于$F$的$F_1$仍必须为相应的直径端点$D_1$或$E_1$. 而且以$X_1$为心的半圆不小于以$X$为心的半圆(否则$V_{D_1}$必在一个闭半平面内，这闭半平面不含$B$，以$l$为边界，从而$V'_{D_1}$不含$B$). 这样进行有限多步后，相应的$F$为$Y$，仍然导致矛盾.

由(22)、(21)得出有一点$G\in\bigcap_{A\in M}V_A$，从这点能见到整个$M$.

如果对于有界闭集$M$，$\bigcap_{A\in M}V_A$非空，那么$M$就称为星形的.

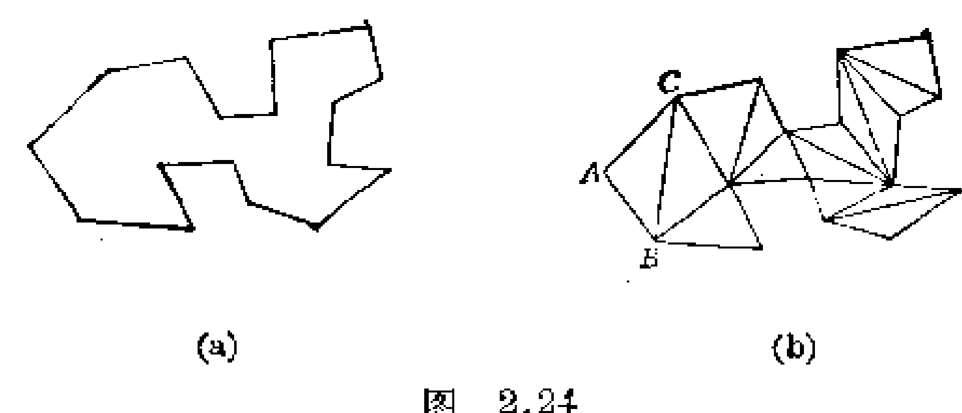
由(22)还得出$\bigcap_{A\in M}V_A$是凸集. 即对有界闭集$M$，能看到每一点的点所成的集是凸集.

当然在例20的条件不成立时，上述凸集$\bigcap_{A\in M}V_A$可能为空集. 这时一名警卫就不够了.

在画廊为$n$边形时，Chvátal指出$\left[\frac{n}{3}\right]$个警卫就行了.

**例21** 如果画廊为$n$边形，那么可以找出$m$个顶点，画廊内任一点至少可从其中一个顶点看到，$m\leqslant\frac{n}{3}$.

**证明** 首先将画廊剖分为三角形，即连若干条互不相交的对角线，将它分成若干个三角形(图2.24(b)). 然后将各个顶点染上三种颜色之一，使得图2.24(b)中有线相连的顶点颜色不同. 这些可以用归纳法来完成：奠基$n=3$是显然的. 在图中先“切下”一个$\triangle ABC$，将剩下的图剖分染色，再将$A$染上与$B$、$C$不同的颜色即可.




(a)　　　　(b)

图　2.24

不妨设三种颜色中，红色顶点的个数 $m\leqslant\frac{n}{3}$. 因为每个三角形中，三个顶点不同色，因而必有红色的顶点，这个顶点可以看到整个三角形. 所以，$m$ 个红色顶点即可控制整个画廊.

形式上比较接近的一个问题是："能否在某一点放一盏灯使得画廊的每一点均被照到?" 这里光线遵照反射定律，可以被墙壁反射.

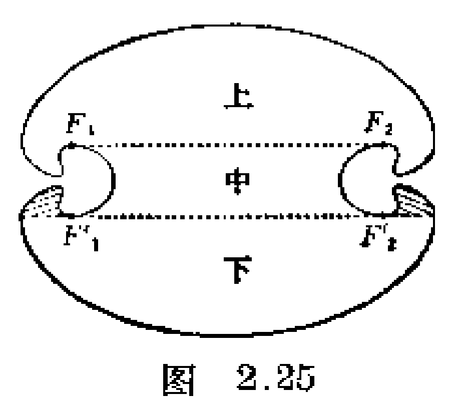



图　2.25

对于多边形的画廊，答案尚不清楚. 对于一般的画廊，答案是否定的. 例如图 2.25，将一个椭圆（焦点为 $F_1$、$F_2$）剪成两半，分别向上下平移，再用一些曲线光滑地连结起来. 如果灯放在上、中两部分，那么光线永远不会进入图中阴影部分.

另一个有趣的问题是在森林里点一根火柴，能否在外面见到火光？这里假定森林由 $k$ 个圆组成，每个圆反射光线.

凸集中还有很多问题. 如：

**1**. 用 X-射线照射一个凸形，荧光屏上点的明暗程度（光

谱)可以定出相应的弦长．如果给出一组点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 及一组长 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，是否必有一个唯一的凸形，与点 $A_k$ 对应的弦长为 $d_k(1\leqslant k\leqslant n)$？如果有，如何作出这个凸形？（图 2.26）

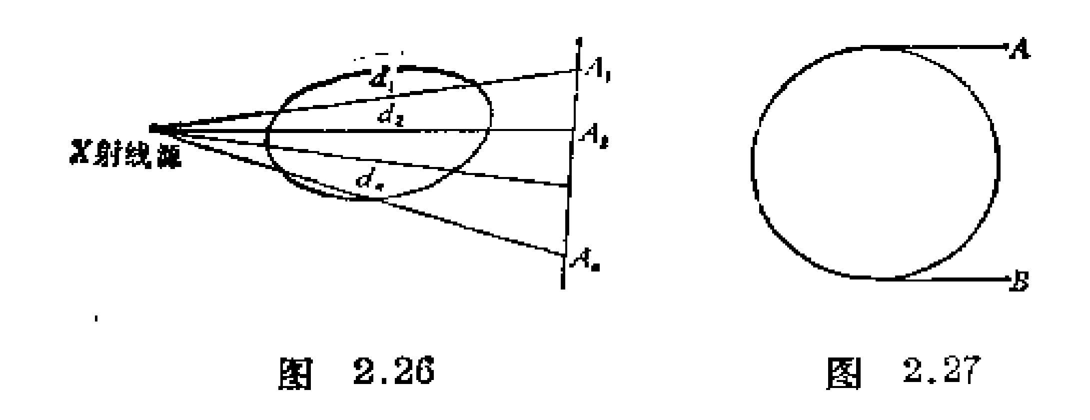



图 2.26　　　　图 2.27

也可以考虑平行的射线．例如对凸 $n$ 边形，已经证明在给定一个内点时，$3n+33$ 条弦足够确定这个凸 $n$ 边形．同时，至少需要 $\frac{3n-1}{2}$ 条弦的例子也已举出．

**2.** 已知一个半径为 1 的圆．求一条最短的曲线，使它与每一条弦(所在的直线)均有公共点．猜测最短的长是 $2+\pi\approx 5.14159\cdots$（图 2.27）．当然，圆可以改为更一般的凸形．

**3.** 已知一族边互相平行的矩形，如果其中每 6 个有一条直线同时穿过它们，那么可以证明有一条直线同时穿过这些矩形．在矩形相等且互不相交时，6 可以改为 5．对相等且互不相交的圆，6 可以改为 4．对任一凸形，将它平移产生一族互不相交的凸形．猜测如果其中每 6 个有一条公共的“贯穿直线”，那么这族凸形有贯穿直线．现在已知的结果中，个数是 128，要降至 6 尚待进一步的努力．

**4.** Helly 定理断言一族凸形有公共点．已经证明如果一族凸形中每 4 个的公共面积 $\geqslant 1$，那么这族凸形的公共面

积$\geqslant\frac{1}{2^8}$. 希望$\frac{1}{2^8}$能进一步改善(尤其是推广至$n$维空间，希望将相应的数$n^{-2n^2}$改为更大的数).

限于篇幅，诸多问题不能一一详加介绍. 有兴趣的读者请查索有关文献，进行研究。

# §3 覆　盖

"敕勒川，阴山下，
天似穹庐，笼盖四野。"
——敕勒歌

为避免重复，在拙著《覆盖》（上海教育出版社 1983 年出版）中已经讨论的内容一般不再列入。

**例 1** 有限多个（闭）正方形，总面积为 3，证明用它们可以平行覆盖① 边长为 1 的正方形。3 改为较小的数时，结论不成立。

**证明** 先将总面积为 3 的正方形依由大到小的顺序排好，顺着 $M$ 的边排成一行，直至总边长等于或超过 1，设这时的正方形边长为 $h_1$（图 3.1）。

再同样地排第二行，第二行比第一行"升高"$h_1$，设第二行最后一个边长为 $h_2$。

这样继续下去。各行最大的正方形，边长分别 $\leqslant 1,\ h_1,\ h_2,\ \cdots$，因此面积之和

图 3.1

$$\leqslant 1\cdot(1+h_1)+h_1\cdot(1+h_2)+\cdots\leqslant 1+2h_1+2h_2+\cdots.$$

由
$$1+2h_1+2h_2+\cdots\geqslant 3,$$
得
$$h_1+h_2+\cdots\geqslant 1.$$
即按照上面的排法就可以覆盖正方形 $M$.

① 即这有限个正方形的边彼此平行，都平行于被覆盖正方形的边。

3 个边长小于 1 的正方形，每一个只能盖住 $M$ 的一个顶点，而 $M$ 有 4 个顶点！所以面积之和改为比 3 小的数时，结论不成立.

**例 2** 有限多个单位圆所覆盖的面积为 $S$，证明可以从中选出若干个互不重叠的圆，总面积不小于 $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}S$.

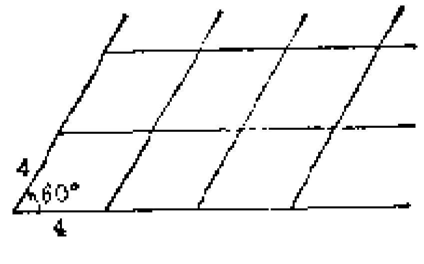



图 3.2

**证明** 考虑平面上的格点，这些格点组成边长为 4、一个角为 60° 的平行四边形（图 3.2）．每个平行四边形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4^2=8\sqrt{3}$.

所述单位圆覆盖的区域 $S$ 分布在若干个平行四边形内，将这些平行四边形剪下叠到一个平行四边形 $M$ 上.

设 $k=\left\lceil\frac{S}{8\sqrt{3}}\right\rceil$（$\lceil x\rceil$ 表示不小于 $x$ 的最小整数，如 $\lceil\pi\rceil=4$），则 $M$ 中至少有一点被覆盖了 $k$ 次．这一点 $A$ 及移过来与它重叠的点，原先两两间的距离都是平行四边形的边长 4 的整数倍.

取含这 $k$ 个点的 $k$ 个单位圆，这些圆互不重叠，而且总面积 $k\pi\geqslant\frac{\pi}{8\sqrt{3}}S$.

**注** 例 2 改进了《覆盖》§3 例 9，即用 $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ 取代了那里的 $\frac{1}{9}$．$\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ 是目前最好的结果.

T. Rado 注意到若有限多个正方形边互相平行、覆盖的面积为 $S$，则可以从中选取若干个互不重叠，而且覆盖的面积$\geqslant\frac{1}{9}S$（每次取最大的一个，去掉与它重叠的，再在其余的

正方形中取最大的，这样继续进行即可）．他猜测 $\frac{1}{9}$ 可以改为 $\frac{1}{4}$（参看研究问题11），但 Ajtai 举出了一个反例，由上百个边长为1与2的正方形组成，不重叠的正方形覆盖的面积都小于 $\frac{1}{4}S$．目前所得的最好结果为 $\frac{8}{63}S$．

**例3** 若 $\triangle ABC$ 的三边的平方和 $a^2+b^2+c^2<6$，则可以用一个单位圆覆盖 $\triangle ABC$．

**证明** 设 $a\geqslant b\geqslant c$，则由于

$$6>a^2+b^2+c^2\geqslant a^2+\frac{1}{2}(b+c)^2>a^2+\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2,$$

所以 $a<2$．

若 $a\leqslant\sqrt{3}$，则过 $B$、$C$ 作单位圆，$\overset{\frown}{BC}$ 所对圆周角不超过 $60°$，而 $\angle A\geqslant 60°$，所以 $A$ 在圆内．

设 $a>\sqrt{3}$．由中线公式

$$2m_a^2=b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2<6-\frac{3}{2}a^2<6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2},$$

所以 $m_a<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$．于是以 $BC$ 中点 $D$ 为心的单位圆覆盖 $\triangle ABC$．

本例也可叙述成："若 $AB^2+BC^2+CA^2<6$，则 $\odot(A,1)$、$\odot(B,1)$、$\odot(C,1)$ 可以用一根针将它们同时扎住"．

**例4** 已知5个同样大小的正三角形可以覆盖正三角形 $ABC$，证明4个这样的正三角形就可以覆盖 $\triangle ABC$．

**证明** $\triangle ABC$ 的三个顶点及三边的中点 $D$、$E$、$F$ 共6个点．5个小的正三角形能盖住这6点，因而其中必有一个至少盖住2个点．所以小三角形的直径 $\geqslant\frac{1}{2}AB$．这里的直

径指小三角形内任两点的距离的最大值(参见上节)，也就是这三角形的最大边．于是小正三角形的边长至少是 $\triangle ABC$ 的边长的一半，4 个这样的三角形显然能覆盖 $\triangle ABC$．

下面的例 5 将例 4 的正三角形改为正方形，其证明困难得多．

**例 5** 已知 5 个同样大小的正方形可以覆盖正方形 $ABCD$，证明 4 个这样的正方形就可以覆盖正方形 $ABCD$．

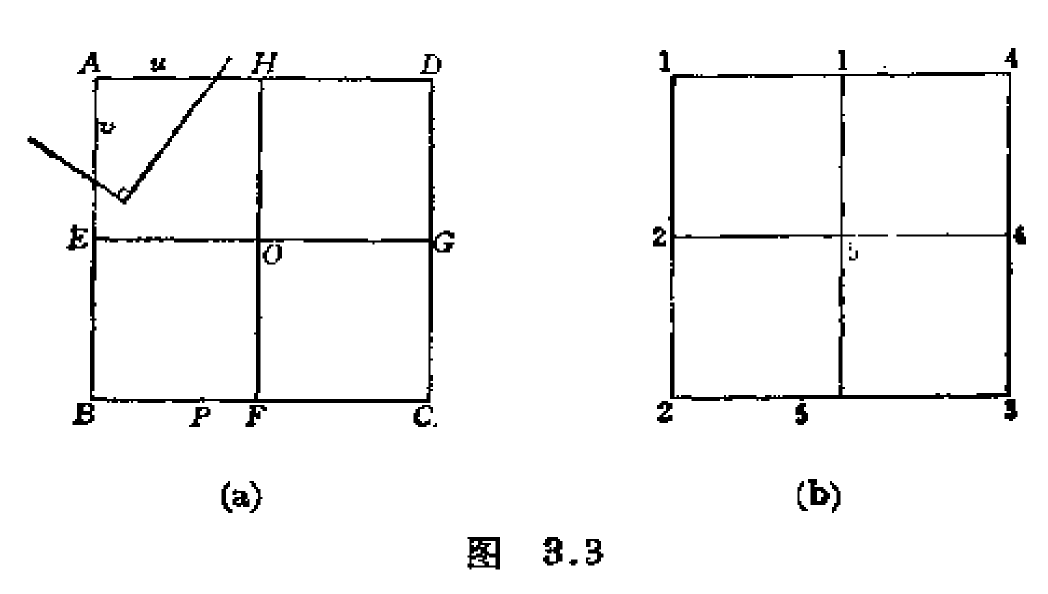



图 3.3

**证明** 设正方形 $ABCD$ 的中心为 $O$，各边中点为 $E$、$F$、$G$、$H$．只需证明 5 个小正方形的边长 $\geqslant \frac{1}{2}$（不妨设 $AB=1$）．

假设小正方形的边长 $<\frac{1}{2}$．每个小正方形至多盖住 $A$、$B$、$C$、$D$、$O$ 中的一个点(因为每两点的距离 $\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}>$ 小正方形的直径)，因而每个小正方形恰盖住这五点中的一个点．图 3.3(b)表明(a)中的点各属于哪一个正方形（1 表明属于第 1 个正方形等等）．

设第 1 个正方形在正方形 $ABCD$ 的周界上覆盖的部分

为 $u$、$v$(图 3.3(a)), 则

$$u^2+v^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

所以

$$u+v\leqslant\sqrt{2(u^2+v^2)}<1$$

即正方形 1 覆盖的部分不是正方形 $ABCD$ 的周界的 $\frac{1}{4}$.

于是 4 个小正方形 1、2、3、4 不能完全覆盖正方形 $ABCD$ 的周界, 从而周界上必有点属于正方形 5. 不妨设 $BC$ 上的点 $P$ 被正方形 5 盖住.

这时 $H$ 不被正方形 5 盖住, 它必属于正方形 1 或 4. 不妨设 $H$ 属于正方形 1. 这时 $E$ 不属于正方形 1.

$E$ 只能属于正方形 2 或 5. 但 $\triangle POE$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

而正方形 5 的内接三角形的面积 $\leqslant\frac{1}{2}S_{正方形5}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$, 所以 $E$ 不属于正方形 5. 同理 $G$ 不属于正方形 5.

$E$ 属于正方形 2. 若 $G$ 属于正方形 3, 则 $OF$ 上的点均不属于正方形 3, 否则这点与 $G$、$O$ 构成面积为 $\frac{1}{8}$ 的内接三角形. 于是正方形 $EBFO$ 完全被正方形 2 与 5 覆盖. 但"一个正方形不能被两个较小的正方形覆盖"(注). 矛盾表明 $G$ 不属于正方形 3, 因而 $G$ 属于正方形 4.

与前面推理相同, $OH$ 上没有属于 4 的点. 正方形 2 至多盖住 $AE$ 上长为 $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ 的一段, 正方形 5 与此类似. 所以正方形 1 至少盖住 $AH$、$AE$、$HO$ 上总长

$$\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2-\sqrt{2}>1.$$

但一个正方形的周界不能被较小的正方形盖住一半或一半以上(参见注)，矛盾!

因此5个小正方形的边长$\geqslant\frac{1}{2}$.

注　这一结论可见拙著《几何不等式》习题七第6题，拙著《覆盖》中作为习题20．为完整起见，我们将证明附在下面：

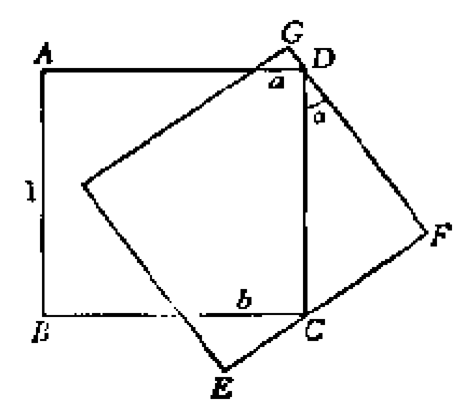


图　3.4

每一个小正方形不能盖住大正方形的对角线，因而不能盖住大正方形的三个顶点．如果两个小正方形能盖住大正方形，那么每个小正方形恰好盖住大正方形两个相邻的顶点．可假定大正方形$ABCD$的顶点$C$、$D$在一个小正方形的边上(若不在边上，可作小正方形适当平移，使得它们在边上)，如图3.4所示．这时设$AB=1$，则

$$a+b=\frac{GD}{\sin\alpha}+\frac{CE}{\cos\alpha}<\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}=1+\frac{(\cos\alpha-1)(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}<1.$$

因此每一个小正方形盖不住大正方形周长的一半．两个小正方形不能盖住大正方形.

**例6**　如果一个凸形能覆盖边长不超过1的任一三角形，那么称它为(覆盖三角形的)*万能覆盖*．求万能覆盖的最小面积.

解　在$\angle A=60^\circ$，$AB=1$，$AB$上的高为$\cos 10^\circ$时，$\triangle ABC$是最小的万能覆盖，最小面积为$\frac{1}{2}\cos 10^\circ\approx 0.4924$.

并且面积最小的万能覆盖只有这一种.

我们分五步来证明上面的结论.

(i) 设 $\triangle DEF$ 为边长不超过 1 的三角形, $EF\geqslant FD\geqslant DE$. 总可假定 $EF=1$, 否则延长 $EF$ 至 $F'$ 使 $EF'=1$, 用 $\triangle DEF'$ 代替 $\triangle DEF$. 同样, 可以假定 $FD=1$. 于是只需考虑用图形覆盖腰长为 1, 顶角 $\leqslant 60°$ 的等腰三角形.

(ii) 我们证明上面所说的 $\triangle ABC$ 是万能覆盖.

以 $C$ 为心作半径为 1 的圆交 $CB$ 于 $K$, 交 $BA$ 于 $L$、$M$, 交 $CA$ 于 $N$(图 3.5(a)). 易知

$$\angle LCM=2\times 10°=20°,$$

$$\angle MCN=90°-60°-10°=20°,$$

因此任一顶角 $\varphi\leqslant 20°$, 腰为 1 的等腰三角形被扇形 $CMN$ 覆盖. 任一顶角 $20°<\varphi\leqslant C$, 腰为 1 的等腰三角形, 可将它的顶点放在 $C$, 底边的端点分别放在 $\overset{\frown}{KL}$ 与 $\overset{\frown}{MN}$ 上, 从而也可被 $\triangle ABC$ 覆盖.

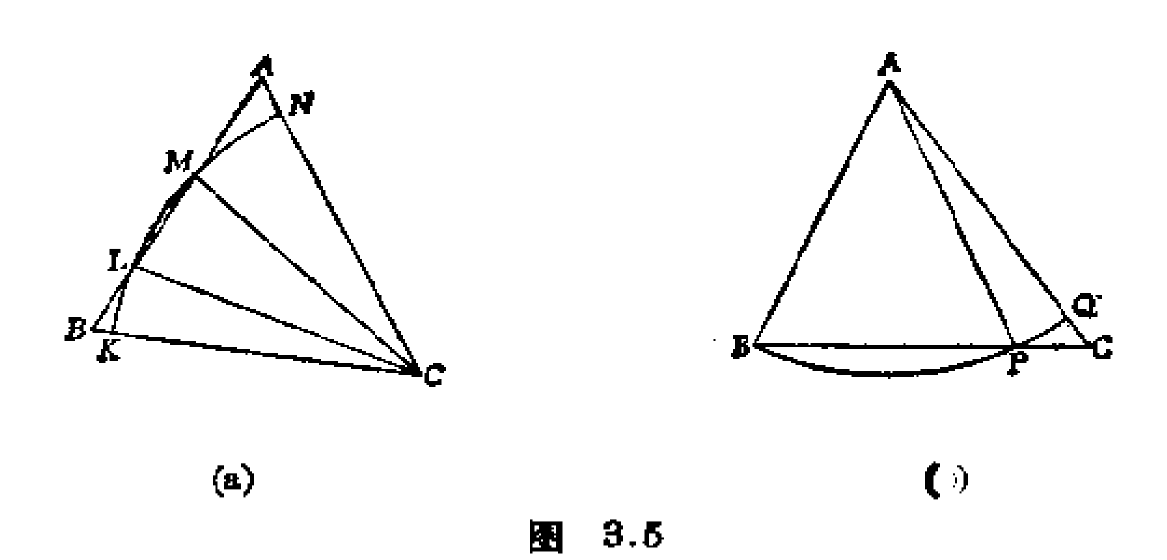



图 3.5

以 $A$ 为心作半径为 1 的圆分别交 $BC$、$CA$ 于 $P$、$Q$, 则因为 $\angle B$ 是 $\triangle ABC$ 的最大角, 所以

$$\angle BAP=180°-2\angle B<\angle C.$$

于是任一顶角$(60^\circ\geqslant)\varphi>O$，腰为1的等腰三角形，可将它的顶点放在$A$，底边的一端为$B$，另一端放在$\overparen{PQ}$上，因而可被$\triangle ABC$覆盖.

(iii) 现在设凸形$M$为万能覆盖，则$M$覆盖边长为1的正三角形$PQR$. 不妨设这个正三角形贴在凸形$M$上.

凸形$M$也覆盖一个$\triangle DEF$，其中$\angle DFE=20^\circ$，$EF=FD=1$. 作正三角形$IJK$，边分别与$\triangle PQR$的边平行，并且覆盖$\triangle DEF$与$\triangle PQR$. 我们使$\triangle IJK$尽可能小，因而$D$、$E$、$F$如果不在$\triangle PQR$内，就必定在$\triangle IJK$的边上(图3.6).

$\triangle IJK$覆盖$\triangle DEF$，因而它的高$\geqslant\cos 10^\circ$，这一点将在(iv)中补证.

凸形$M$的面积至少为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}(d_D+d_E+d_F),\tag{1}$$

其中$d_D$表示$D$到$\triangle PQR$的相应边(该边与$\triangle IJK$含$D$的边平行)的距离，当$D$在$\triangle PQR$内，$d_D=0$. $d_E$、$d_F$的意义类似(参见图3.6)，并且若$D$、$E$在同一边上，则(1)中$d_D$、$d_E$只保留一个.

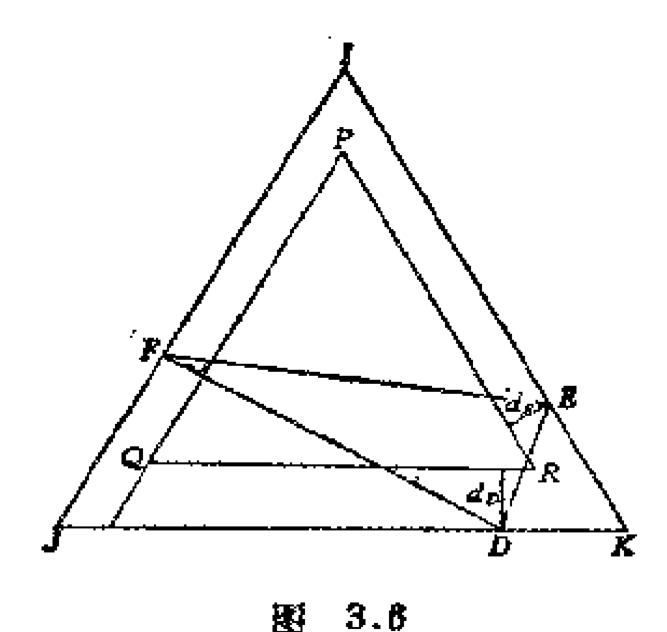


图 3.6

如图3.6，$d_D+d_E$即$R$到$DK$、$EK$的距离之和. 熟知$R$到正三角形$IJK$三边距离之和等于$\triangle IJK$的高，所以

$$d_D+d_E+d_F=(\triangle IJK\text{ 的高})-(\triangle PQR\text{ 的高})$$
$$\geqslant\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

由(1)、(2)得

$$\text{凸形 } M \text{ 的面积}\geqslant\frac{1}{2}\cos 10°. \tag{3}$$

因此(i)中的 $\triangle ABO$ 是最小的万能覆盖.

(iv) 设正三角形 $IJK$ 覆盖 $\triangle DFE$ ($\angle DFE=20°$, $EF=FD=1$).

总可假定 $D$、$E$、$F$ 均在 $\triangle IJK$ 的边上, 并且 $\triangle IJK$ 的每条边上至少有 $\triangle DEF$ 的一个顶点, 否则 $\triangle IJK$ 还可缩小.

若 $F$ 不与 $\triangle IJK$ 的顶点重合, 如图 3.7(a), $\angle IFD$、$\angle JFE$ 中必有一个为钝角, 否则 $D$ 或 $E$ 到 $IJ$ 的距离

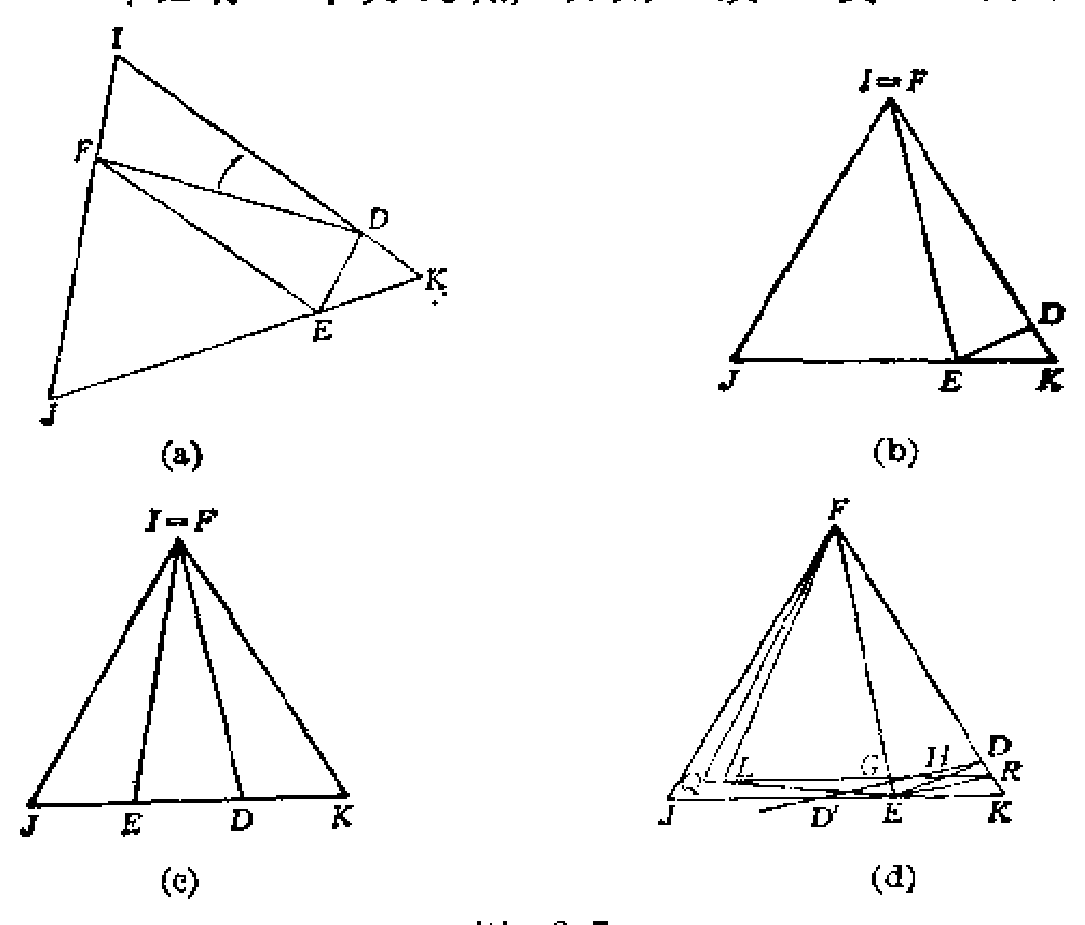



图 3.7

$\geqslant \cos 10°$. 设 $\angle IFD > 90°$，则 $\angle IFD > \angle FDE$，所以 $\angle EDK > \angle I = 60°$，$\angle DEK$ 是锐角. 可将 $\triangle DEF$ 绕 $D$ 旋转，使 $F$ 落到 $DI$ 上.

因此，可假定 $F$ 与 $I$ 重合，$FD$ 在 $IK$ 上(图 3.7(b))或 $ED$ 在 $JK$ 上(图 3.7(c)). 易知无论哪一种情况，均有 $\triangle IJK$ 的高 $= FE \times \cos 10° = \cos 10°$.

(v) 最后证明最小的万能覆盖必为前面所说 $\triangle ABC$.

事实上，若凸形 $M$ 是万能覆盖，并且使(3)中等号成立，那么 $\triangle IJK$ 的高必为 $\cos 10°$，而且 $\triangle DEF$ 与 $\triangle IJK$ 的关系如图 3.7(b)或(c).

对于图 3.7(b). 若(iii)中的 $\triangle PQR$(结合图 3.6)的顶点 $R$ 与 $K$ 重合，则 $P$、$Q$ 分别在 $KI$、$KJ$ 上. $\triangle DEF$ 与 $\triangle PQR$ 的凸包即 $\triangle ABC$. 若 $R$ 不与 $K$ 重合，但 $R$ 在 $KI$ 上，则上述凸包为四边形 $FQER$，其面积为 $\frac{1}{2}\cos 10°$. 设 $QR$ 分别交 $EF$　$ED$ 于 $G$、$H$ (图 3.7(d))，则 $\angle QHE = \angle RHD = \angle FDE - \angle FRQ = 80° - 60° = 20°$，$\angle FGQ = \angle EGH = 180° - \angle QHE - \angle FEH = 180° - 20° - 80° = 80°$，所以 $\angle FER = \angle FGQ > \angle FEQ$. 点 $D$ 关于 $FE$ 的对称点 $D'$ 在四边形 $FQER$ 外. 以 $F$ 为心，1 为半径作弧交 $QE$ 于 $L$. 由于 $D'$ 在四边形 $FQER$ 外，$\angle LFE > \angle EFR = 20°$. 从而顶角 $\varphi < \angle LFE$ 并且 $\varphi > 20°$ 的、腰为 1 的等腰三角形不被四边形 $FQER$ 覆盖. 若 $R$ 不在 $KI$ 上，则上述凸包的面积 $> \frac{1}{2}\cos 10°$.

对于图 3.7(c)，若 $R$ 与 $K$ 重合，情况同上. 若 $R$ 不与 $K$ 重合，则 $\triangle DEF$ 与 $\triangle PQR$ 的凸包面积 $> \frac{1}{2}\cos 10°$.

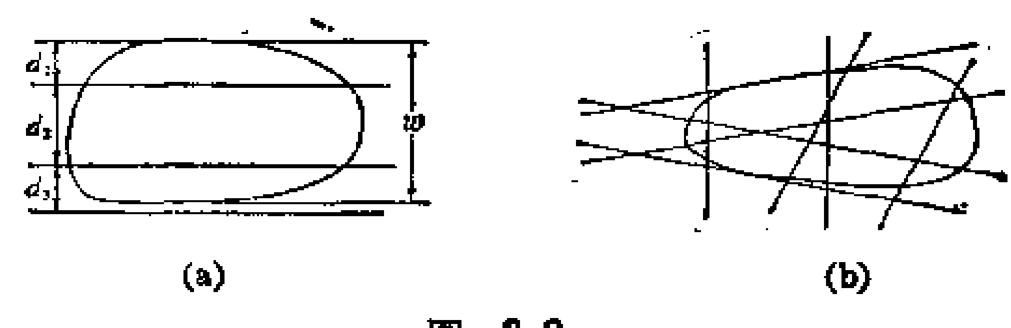
综上所述，面积最小的万能覆盖只有前面的 $\triangle ABO$.

我们称两条平行线及它们所夹的部分为带形，这两条平行线之间的距离为带形的宽度.

如果凸形 $M$ 的宽度为 $w$，$k$ 个带形的宽度分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_k$，那么在

$$d_1+d_2+\cdots+d_k \geqslant w \tag{4}$$

时，这 $k$ 个带形显然覆盖 $M$（图 3.8(a)）. Tarski（1932 年）猜测反过来的命题也成立，即




(a)　　　　(b)

图 3.8

**例 7**　如果宽度为 $w$ 的凸形 $M$ 被宽度分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 的 $k$ 个带形覆盖，那么

$$d_1+d_2+\cdots+d_k \geqslant w \tag{4}$$

成立（注意，覆盖时带形的边不一定平行，如图 3.8(b)）.

**证明**　本题有多种证法. 我们利用 §2 的例 7 先证明下面的引理，它本身也很有趣.

**引理**　凸形 $M$ 的宽度为 $w$，$M'$ 是中心对称的凸形，周长 $L' \leqslant 2w$，则可以作一个平移，使 $M'$ 完全包含在 $M$ 内.

**证明**　考虑与 $M'$ 位似（平移可看作位似中心在无穷远的位似）、包含在 $M$ 内的所有凸形. 这种凸形的集合当然是非空的（取位似中心在 $M$ 内，可作一个很小的凸形与 $M'$ 位似，它完全在 $M$ 内），其中必有一个最大的，记它为 $M_1$. $M_1$ 与 $M$ 必有两条公共的支持直线，否则还可以用位似变换使

$M_1$ 增大，但仍在 $M$ 内(两次位似的结果仍是位似).

(i) 若 $M_1$ 与 $M$ 有两条公共的支持直线互相平行，则这两条平行线间的距离 $\geqslant w$. 因此 $M_1$ 的周长 $\geqslant 2w \geqslant L'$，即 $M_1$ 至少与 $M'$ 一样大，从而 $M'$ 可通过平移移到 $M$ 中.

(ii) 若 $M_1$ 与 $M$ 的两条公共的支持直线相交于 $A$ (图 3.9(a))，则 $M_1$ 与 $M$ 还有第三条公共的支持直线，这三条支持直线构成 $\triangle ABC$，它既是 $M_1$ 也是 $M$ 的外接三角形(若没有这第三条支持直线，则 $M_1$ 可向与 $A$ 相反的方向平移，然后再放大，仍然含于 $M$ 中、与 $M_1$ 的最大性矛盾). $\triangle ABC$ 的宽 $\geqslant w$. 由 §2 例 7，$M_1$ 的周长 $\geqslant 2w \geqslant L'$.

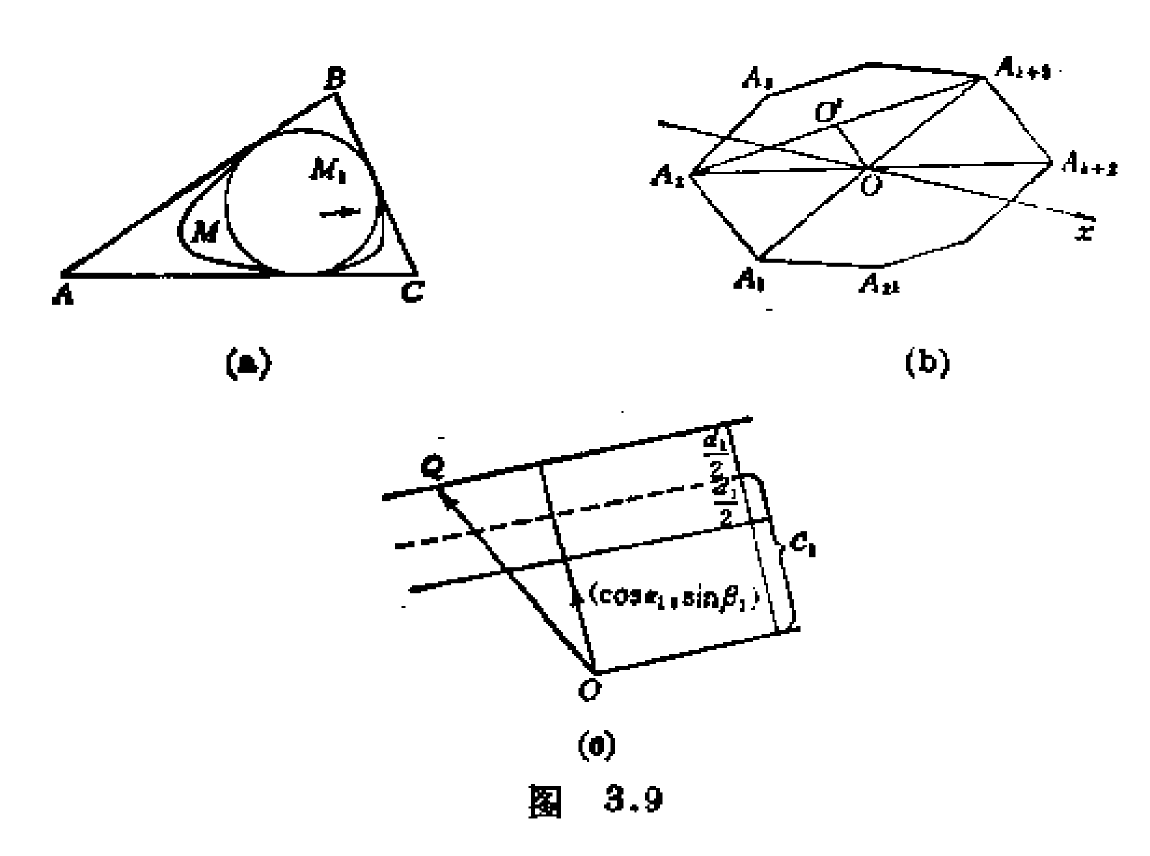


图 3.9

现在证明(4). 假设(4)不成立，即

$$\sum d_i < w. \tag{5}$$

自原点 $O$ 向各带形的边作垂线. 设垂线与 $x$ 轴正向所成角为 $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant k)$，$\pi \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k > 0$.

任取一点 $A_1$，过 $A_1$ 作 $A_1A_2$ 与 $x$ 轴正向夹角为 $\alpha_1$，并且 $A_1A_2=d_1$，再作 $A_2A_3$ 与 $x$ 轴正向夹角为 $\alpha_2$，并且 $A_2A_3=d_2$，……，得到一条凸折线 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$. 再关于 $A_1A_{k+1}$ 的中点 $G$ 作对称，得出中心对称的凸多边形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$，其周长为

$$L=2\sum d_i<2w. \tag{6}$$

根据引理，不妨假定凸多边形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$ 在凸形 $M$ 内部. 又为记号简单起见，设凸多边形的对称中心 $G$ 就是原点 $O$(否则作一平移).

考虑坐标为$\left(\frac{1}{2}\sum(\pm d_i\cos\alpha_i),\ \frac{1}{2}\sum(\pm d_i\sin\alpha_i)\right)$的点，其中 $\pm$ 号任意选取，但 $\cos\alpha_i$ 与 $\sin\alpha_i$ 前的符号相同，因此共有 $2^k$ 个. 我们证明这 $2^k$ 个点都属于凸多边形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$，所以都在凸形 $M$ 的内部. 再证明其中至少有一个点不在任一个带形的内部. 从而凸形 $M$ 不能被这 $k$ 个带形覆盖，导致矛盾.

当 $k=2$ 时($k=1$ 则(4)显然成立，不必证)，上述 4 个点即凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点. 假设将 $k$ 换为 $k-1$ 时，$2^{k-1}$ 个点$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\pm d_i\cos\alpha_i),\ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\pm d_i\sin\alpha_i)\right)$都在相应的 $2(k-1)$ 边形内. 这个 $2(k-1)$ 边形以 $A_2A_{k+1}$ 的中点 $O'$ 为对称中心(图 3.9(b))，一半是多边形 $A_2A_3\cdots A_{k+1}$，另一半可由多边形 $A_1A_{2k}\cdots A_{k+2}$ 沿 $A_1A_2$ 平移至 $A_1$ 与 $A_2$ 重合而得(所以这 $2(k-1)$ 边形当然在多边形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$ 内). $O'$ 也是这时的原点，横轴与原来的 $x$ 轴平行. 对于 $k$,

$$\left(\frac{d_1}{2}\cos\alpha_1+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\pm d_i\cos\alpha_i),\frac{d_1}{2}\sin\alpha_1+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\pm d_i\sin\alpha_i)\right)$$

即上面所说的点$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\pm d_i\cos\alpha_i),\ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\pm d_i\sin\alpha_i)\right)$,

因为 $O'$ 的坐标即 $\left(\frac{d_1}{2}\cos\alpha_1,\ \frac{d_1}{2}\sin\alpha_1\right)$，所以这样的点在多边形 $A_1A_2\cdots A_{2k}$ 内，它的对称点 $\left(-\frac{d_1}{2}\cos\alpha_1+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\mp d_i\cos\alpha_i),\ -\frac{d_1}{2}\sin\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(\mp d_i\sin\alpha_i)\right)$ 当然也在多边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 内.

另一方面 设 $O$ 到第 $i$ 个带形的中位线(即与带形两边距离相等的直线)的距离为 $c_i(1\leqslant i\leqslant k)$，取 $\pm$ 号，使

$$(\sum(\pm d_i\cos\alpha_i))^2+(\sum(\pm d_i\sin\alpha_i))^2-4\sum(\pm c_id_i) \qquad (7)$$

最大((7)中 $d_i\cos\alpha_i$，$d_i\sin\alpha_i$，$c_id_i$ 前的符号相同)．我们证明相应的 $Q$ 点不在任一带形，比如第一个带形 $S_1$ 的内部.

为此，设使(7)最大的 $Q$ 点，所取符号为 $\eta_i\in\{\pm1\}$，$1\leqslant i\leqslant k$．将(7)的最大值减去一个类似的表达式，其中仅 $d_1\cos\alpha_1$(及 $d_1\sin\alpha_1$，$c_1d_1$)前面的符号改为 $-\eta_1$，其余符号均为 $\eta_i(2\leqslant i\leqslant k)$．由最大性，差

$$4\eta_1d_1\cos\alpha_1\sum_{i=2}^{k}\eta_id_i\cos\alpha_i$$
$$+4\eta_1d_1\sin\alpha_1\sum_{i=2}^{k}\eta_id_i\sin\alpha_i-8c_1d_1\eta_1\geqslant0,$$

即

$$\eta_1\cos\alpha_1\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\eta_id_i\cos\alpha_i\right)+\eta_1\sin\alpha_1\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\eta_id_i\sin\alpha_i\right)$$
$$\geqslant c_1\eta_1+\frac{d_1}{2}. \qquad (8)$$

当 $\eta_1=1$ 时，(8)式左边是 $\overrightarrow{OQ}$ 在向量 $(\cos\alpha_1,\ \sin\alpha_1)$ 上的射影的长，而 $(\cos\alpha_1,\ \sin\alpha_1)$ 是与 $S_1$ 的边垂直的单位向量．(8)表明所说射影 $\geqslant c_1+\frac{d_1}{2}$，因此 $Q$ 在 $S_1$ 的上边(距 $O$ 较远

的边)外或上边上。当 $m_1=-1$ 时，(8)表明所说射影长 $\leqslant c_1-\frac{d_1}{2}$，因此 $Q$ 在 $S_1$ 的下边外或下边上(图 3.9(c))。

在《覆盖》习题 59 中讨论过 $M$ 为圆的特殊情况。

下面的毛虫问题也是颇为有趣的。

设想有一条长为 1 的毛虫，毛虫很细，相当于一条长为 1 的曲线。现在要用一个凸形将它完全覆盖，这个凸形的面积的最小值是多少？

显然半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆能覆盖这条毛虫，这只要将圆心对准"中点"$\left(\text{从这点到头或尾的曲线长都是 }\frac{1}{2}\right)$即可。因为，毛虫身上任一点 $A$ (图 3.10)到 $O$ 的距离 $OA\leqslant$ 毛虫从 $O$ 到 $A$ 的长 $\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $A$ 在 $\odot\left(O,\ \frac{1}{2}\right)$内，即 $\odot\left(O,\ \frac{1}{2}\right)$覆盖毛虫。这时覆盖图形(圆)的面积为 $\frac{\pi}{4}\approx0.7854$。

可以证明半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆就能覆盖这条毛虫。这时覆盖图形的面积为 $\frac{\pi}{8}\approx0.3927$。

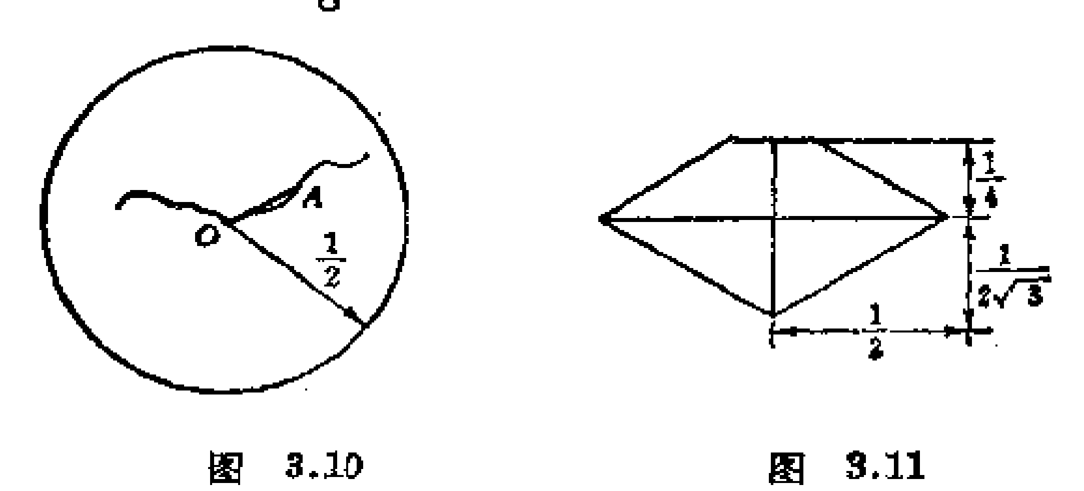



图 3.10　　图 3.11

目前最好的结果是图 3.11 中截去一个角的菱形，它的面积是 0.28608…。

**例 8** 证明用高为 1 的正三角形可以覆盖长为 1 的细毛虫．又问：用边长为 1 的正三角形能否覆盖这条毛虫？

**证明** 作毛虫的三条支持直线（即毛虫的凸包的支持直线．每条支持直线与毛虫有公共点，而且毛虫完全位于支持直线的一侧），每两条的夹角为 60°（图 3.12）．

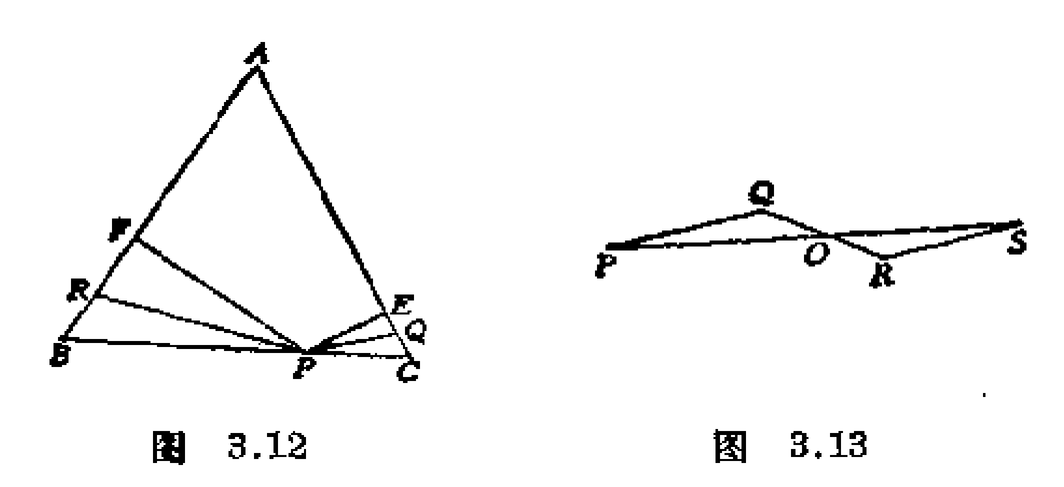



图 3.12　　　　图 3.13

这三条支持直线构成一个正三角形 $ABO$．设毛虫与三边的公共点分别为 $P$、$Q$、$R$，$P$ 到 $AO$、$AB$ 的距离分别为 $PE$、$PF$，则

$$PE+PF\leqslant PQ+PR\leqslant \text{毛虫的长度 } 1. \qquad (9)$$

熟知 $PE+PF=\triangle ABO$ 的高，因此 $\triangle ABC$ 的高 $\leqslant 1$．

不论毛虫成什么形状，都可以用上面的方法作一个正三角形覆盖它，这个正三角形的高 $\leqslant 1$．因此高为 1 的正三角形覆盖长为 1 的毛虫．

对于边长为 1 的正三角形，毛虫如果弯成图 3.13，就不能覆盖它．其中折线 $PQRS$ 即毛虫，$\angle QPS=\angle RSP=10^\circ=\gamma$，$PS$ 与 $QR$ 的交点 $O$ 将这两条线段平分，$\angle POQ=25^\circ=\beta$，$PS=2a=\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta+\sin\gamma}=0.9619465$，$PQ=b=\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}=0.354387$，$QO=c=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}=0.145613$，

$\angle SPR=\angle QSP=\delta(>5°)$, $PR=d$.

不能覆盖的理由如下：设边长为1的正三角形 $ABC$ 覆盖毛虫. 不失一般性,可以假设直线 $PS$ 交 $AB$ 于 $P'$, 交 $AC$ 于 $S'$, $P$、$S$ 在线段 $P'S'$ 内, 并且 $\frac{1}{2}\leqslant AP'\leqslant AS'$ (图 3.14).

作 $\angle S'P'R'=\angle S'PF=\delta$, $P'R'$、$PF$ 分别交 $BC$ 于 $R'$、$F$, 则 $PF\leqslant P'R'$. 要证明 $R$ 不在 $\triangle ABC$ 内, 只需证明 $y=P'R'<d$.

向上平移直线 $PS$, 相应的 $y=P'R'$ 增加(因为 $P'$ 向 $A$ 移动), 因此不妨设 $P'=P$, $S'=S$(先平移使 $P$ 落到 $AB$ 上, 再平移保持 $P$ 在 $AB$ 上, 并且 $S$ 落到 $AC$ 上).

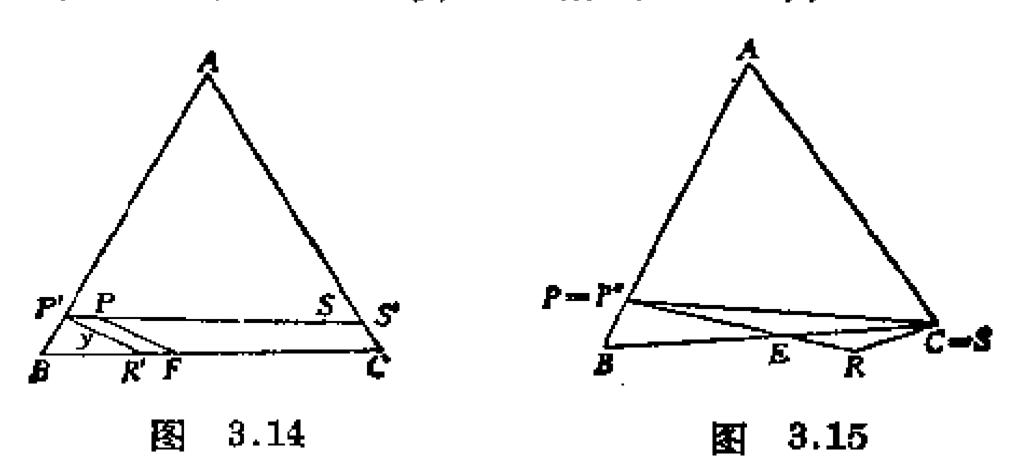



图 3.14　　　　图 3.15

在 $AB$ 上取 $P''$, 使 $CP''=2a$ $\left(AP''>\frac{1}{2}\right)$, 则 $P''$ 必在线段 $AP$ 内(否则 $CP''>CP>PS$). 这时, 相应于 $P''$ 的 $y$ 大于 $P$ 的相应值. 所以可假定 $P=P''$, $S=C$(图 3.15).

这时, 设 $\angle PCB=\gamma'$, 则由 $\triangle PCB$,

$$\frac{2a}{\sin 60°}=\frac{1}{\sin(60°+\gamma')}.$$

因为 $2a>\frac{\sin 60°}{\sin 65°}$, 所以 $\gamma'<\gamma$. 即这时 $R$ 在 $\triangle ABC$ 外(当然有相应的 $y<d$).

注 上面的讨论也包含 $S'$ 在 $BO$ 上的情况，此时过 $O$ 作 $OP'' /\!/ S'P'$ 交 $AB$ 于 $P''$，用 $OP''$ 代替 $S'P'$ 即可，所以全部情况均包含在上面的讨论中$\left(\text{当 } AP' \geqslant AS' \geqslant \frac{1}{2} \text{ 时，将 } r\text{、}d \text{ 换成 } \delta\text{、}b\right)$.

细毛虫问题可以从三个方面作进一步的探讨：(i)曲线(细毛虫)的形状. (ii)覆盖毛虫的凸形 $M$ 的形状. (iii)凸形 $M$ 运动的方式.

例如，限定凸形 $M$ 只能平行移动. 这时，毛虫可成为任一方向的、长为 1 的线段，因此 $M$ 在任一方向上的宽至少为 1. 而宽度为 1 的凸形中以高为 1 的正三角形面积最小(研究问题 7)，所以限定凸形 $M$ 只能平行移动时，例 8 中的、高为 1 的正三角形在覆盖毛虫的凸形中，面积最小.

另一方向，如果限定曲线是闭的，即毛虫首尾相连，并且凸形 $M$ 只能平行移动，那么 Wetzel 证明了 $M$ 的面积 $\geqslant 0.155\cdots$. Bezdek 与 Connelly 造出了一个能够覆盖的凸形 $M$，面积为 $0.165\cdots$.

此外，还可以限定凸形 $M$ 为正三角形，三角形或弓形，限定毛虫为凸曲线等等. 面积最小也可以改为直径最小.

设闭曲线 $L$(长度也记为 $L$)上任两点 $x$、$y$ 的距离为 $d(x, y)$，Alexander 猜测

$$\min_{x} \max_{y} d(x, y) \leqslant \frac{L}{\pi}. \tag{10}$$

这一猜测于 1977 年被 Falconer 证明. 由(10)可以推出长为 1 的闭曲线可以用半径为 $\frac{1}{\pi}$ 的半圆覆盖.

事实上，设 $L$ 所包围的图形为 $K$，$K$ 的凸包为 $K'$，则 $K'$ 的周界的长 $L' \leqslant L=1$.

由(10)，在 $K'$ 的边界上有一点 $O$，$O$ 到边界上任一点的距离 $\leqslant\frac{1}{\pi}$. 以 $O$ 为圆心，$\frac{1}{\pi}$ 为半径作圆. 此圆覆盖 $K'$，也覆盖 $K$ 及 $L$. 过 $O$ 作 $K'$ 的支持直线，分成的两个半圆中有一个覆盖 $L$.

挂谷(Kakeya)宗一曾提出一个有趣的问题：

一位武士在上厕所时遇到袭击，矢石如雨，他只能挥舞一根长为 1 的木棍抵挡. 问将这根木棍转动一周，至少要经过多大的面积?

换句话说，在每个方向上包含一条长为 1 的线段，那么这个图形的面积至少多大?

这里的图形不一定是凸的(否则就是例 8 中高为 1 的正三角形). 很多人研究这个问题，Besicovitch 给出的答案有点出乎意料：图形的面积可以任意小. 所作的图形里面有充分多的洞，像镂花的缎带.

如果不允许有洞(即图形是单连通的)，那么目前的最好结果是最小面积 $<\frac{5-2\sqrt{2}}{24}\pi\left(<\frac{\pi}{11}\right)$.

如果图形 $M$ 经过平移(不允许旋转)可以覆盖图形 $N$，我们就称 $M$ 是 $N$ 的*平移覆盖*.

例如 $N$ 是长为 1 的线段，那么直径为 1 的圆 $M$ 就是 $N$ 的平移覆盖. 挂谷问题就是寻找面积最小的图形 $M$，不论长为 1 的线段怎样放置，$M$ 都是它的平移覆盖.

通常所说的覆盖允许图形 $M$ 运动(平移，旋转或对称). 如果图形 $M$ 能够(通过运动)覆盖任一个直径为 1 的图形 $N$，那么 $M$ 称为万能覆盖.

寻找面积最小的万能覆盖也是一个著名问题. 1920 年，

Pál 发现边长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的正六边形是万能覆盖，而且可以砍去两个角，使剩下图形仍为万能覆盖，这时图形的面积是 $2-\frac{2}{\sqrt{3}}=0.84529946\cdots$（参见拙著《覆盖》§3 例 6 及习题 68）。1936 年 Sprague 在这图形上再切去一点点，得到面积为 $0.84413770\cdots$ 的万能覆盖。1975 年 Hansen 在 Sprague 的基础上切去更小的两块，使万能覆盖的面积大约减少 $2\times10^{-19}$，并指出这个图形没有凸子集是万能覆盖了。另一方面，1980 年 Duff 对 Pál 的截角六边形作不同的处理，得出面积为 $0.84413570\cdots$ 的万能覆盖，但这个图形不是凸的。现在还不清楚 Hansen 与 Duff 的结果是否为最佳，即不知道凸或非凸的万能覆盖面积能否更小。

# §4 嵌　入

> “余尝见夏琱戈，于铜上
> 相嵌以金，其细如发.”
> ——赵希鹄《洞天清乐
> 集》古钟鼎彝器辨

嵌入与覆盖的关系很密切．一个集 $M$ 覆盖另一个集 $N$ 也就是集 $N$ 能嵌入集 $M$．在正方形内嵌入最大的正三角形等同于求覆盖正三角形的最小正方形．嵌入与覆盖往往互为对偶．用多少单位圆可以覆盖一个正方形，它的对偶问题就是一个正方形内可以嵌入多少个单位圆．

在拙著《覆盖》中已介绍了一些嵌入问题，本书一般不再重复．

**例 1**　证明在任一面积为 $S$ 的凸形里都可以嵌入一个三角形，它的面积 $\geqslant$ (i) $\frac{1}{4}S$；(ii) $\frac{1}{3}S$．

**证明**　(i) 如图 4.1，先作两条平行的支持直线，$A$、$B$ 分别为它们与凸形的公共点．弦 $AB$ 将凸形分成两部分，有一部分的面积 $\geqslant\frac{1}{2}S$．

再作与 $AB$ 平行的支持直线，它与凸形的较大部分有公共点 $C$．$AB$ 及三条支持直线构成平行四边形，其面积 $\geqslant\frac{1}{2}S$．$\triangle ABC$ 的面积是平行四边形的一半，因而面积大于或

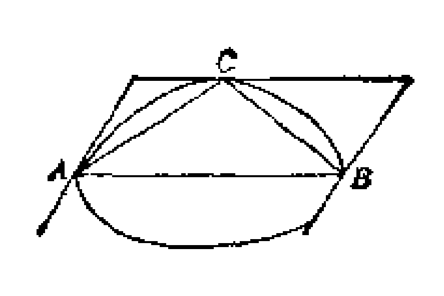



图 4.1

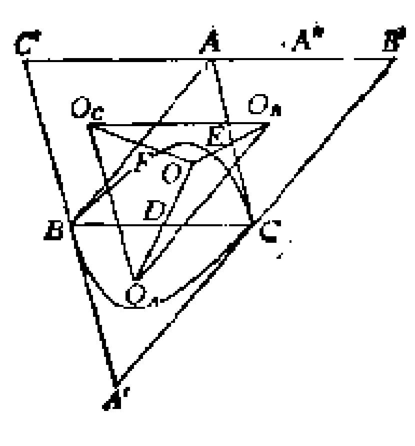



图 4.2

等于 $\frac{1}{4}S$.

(ii) 设 $\triangle ABC$ 是凸形的内接三角形中面积最大的. $D$、$E$、$F$ 分别为 $BC$、$CA$、$AB$ 的中点.

过 $A$、$B$、$C$ 分别作对边的平行线, 构成 $\triangle A'B'C'$(图 4.2). 凸形没有点在 $\triangle A'B'C'$ 外, 否则设有一点 $A''$ 与 $A'$ 在 $BC$ 异侧, 则 $\triangle A''BC$ 的面积大于 $\triangle ABC$ 的面积, 矛盾!

显然 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}S_{\triangle A'B'C'}\geqslant\frac{1}{4}S$. 这就给出(i)的另一个证明($A'B'$、$B'C'$、$C'A'$ 实际上是凸形的支持直线), 但要证明(ii), 还需要稍细致的分析.

将凸形在 $\triangle A'BC$ 内的部分关于 $D$ 作中心对称得到完全在 $\triangle ABC$ 内的"弓形"$M_A$. 类似地得出弓形 $M_B$、$M_C$. 如果这三个弓形没有公共内点, 那么三个弓形面积之和 $\leqslant 2S_{\triangle ABC}$, 从而 $S_{\triangle ABC}\geqslant\frac{1}{3}S$.

下面证明这三个弓形的确没有公共内点.

假设 $O$ 是这三个弓形的公共内点. 作 $O$ 关于 $D$、$E$、$F$ 的对称点 $O_A$、$O_B$、$O_C$, 则 $O_BO_C=2EF=BC$, $O_CO_A=CA$, $O_AO_B=AB$. 所以 $\triangle O_AO_BO_C\cong\triangle ABC$.

由于 $O$ 是三个弓形的公共内点，所以 $O_A$、$O_B$、$O_C$ 在凸形内. 并且有一个以 $O$ 为心的小圆在弓形 $M_A$ 内，从而也有一个以 $O_A$ 为心的小圆在凸形内（两个小圆关于 $D$ 对称）. 这就表明在 $OO_A$ 延长线上还有一点 $O'_A$ 在凸形内. 凸形的内接三角形 $O'_AO_BO_C$ 的面积大于 $\triangle O_AO_BO_C$ 的面积，因而也就大于 $\triangle ABC$ 的面积，与 $\triangle ABC$ 的最大性矛盾.

(ii) 优于 (i)，但这不是最好的结果. 用稍高级的工具，1917 年 W. Blaschke 证明了凸形内的面积最大的三角形，面积 $\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}S$，$S$ 为凸形的面积. 并且等号当且仅当凸形为椭圆时成立.

**例 2** 证明面积为 $S$ 的凸形内可以嵌入一个平行四边形，它的面积 $\geqslant\frac{1}{2}S$.

**证明** 考虑凸形的最大的内接平行四边形 $ABCD$（注）.

凸形除平行四边形外，还有四个弓形. 对以 $AB$ 为弦的弓形，过弧上每一点 $E$ 作 $BC$ 的平行线，交 $AB$ 于 $F$，然后延长 $EF$ 到 $E'$，使 $FE'=FE$（图 4.3）. 这样，产生一个新的弓形 $M_{AB}$，它在平行线 $BC$、$AD$ 之间. 类似地，可以得到其他三个弓形 $M_{BC}$、$M_{CD}$、$M_{DA}$.

$M_{AB}$ 与 $M_{BC}$ 没有公共内点，如果 $O$ 是它们的公共内点，

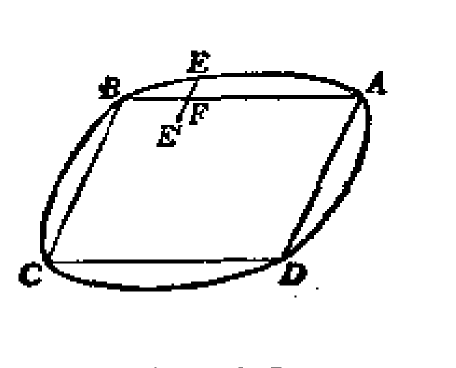


图 4.3

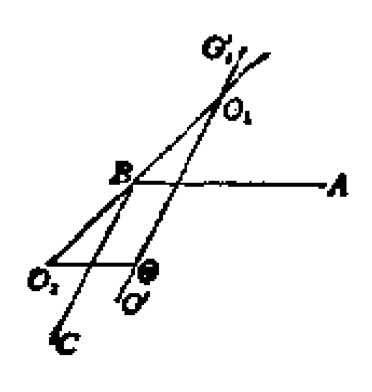


图 4.4

那么如图 4.4，有 $O_1$、$O_2$ 两点分别在凸形的以 $AB$、$BC$ 为弦的弓形里，并且在上面的作图中，$O_1$、$O_2$ 都得到 $O$，即 $OO_1 /\!/ BC$，并且被 $AB$ 平分；$OO_2 /\!/ AB$，并且被 $BC$ 平分．易知这时 $B$ 在 $O_1O_2$ 上并且是线段 $O_1O_2$ 的中点．由于 $O_1$、$O_2$ 都属于凸形，所以直线 $O_1O_2$ 就是凸形过 $B$ 的支持直线．

因为 $O$ 是公共内点，所以线段 $O_1O$ 的延长线上有点 $O'$ 仍属于 $M_{AB}$，从而线段 $OO_1$ 的延长线上有一点 $O_1'$ 属于凸形．这与直线 $O_1O_2$ 是支持直线矛盾．

同理，每两个"相邻"的弓形没有公共内点．

下面证明每两个"相对"的弓形也没有公共内点．

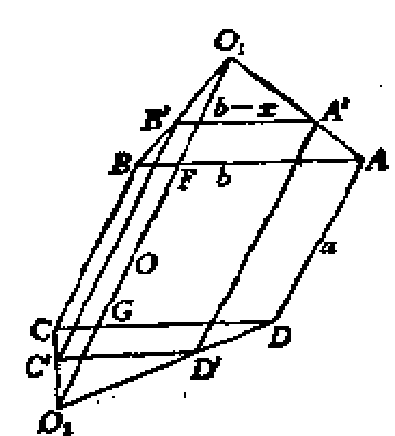


图 4.5

设 $O$ 是弓形 $M_{AB}$、$M_{CD}$ 的公共内点．过 $O$ 作 $BC$ 的平行线，在这线上有两点 $O_1$、$O_2$ 分别属于凸形以 $AB$、$CD$ 为弦的弓形（图 4.5），并且可设 $O_1O_2$ 分别交 $AB$、$CD$ 于 $F$、$G$，$O_1F>FO$，$O_2G>GO$（$O_1$ 相当于图 4.4 中的 $O_1'$）．

六边形 $O_1BCO_2DA$ 内接于凸形．设 $AB=b$，$AD=a$．作 $A'B' /\!/ AB$，$A'$、$B'$ 分别在 $O_1A$，$O_1B$ 上，$A'B'=b-x$．过 $A'$、$B'$ 作 $BC$ 的平行线，分别交 $O_2D$、$O_2C$ 于 $D'$、$C'$．易知四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形．

记 $O_1O_2=2a+d$，则易算得

$$A'D'=a+\frac{x}{b}(2a+d-a).$$

因为

$$(b-x)\left(a+\frac{x}{b}(2a+d-a)\right)=ab+\frac{x}{b}(bd-ax-dx),$$

在 $x$ 足够小时，$bd-ax-dx>0$，所以

$$(b-x)\left(a+\frac{x}{b}(2a+d-a)\right)>ab.$$

即平行四边形 $A'B'C'D'$ 的面积大于平行四边形 $ABCD$ 的面积. 这与四边形 $ABCD$ 的最大性矛盾.

弓形 $M_{AB}$、$M_{CD}$ 无公共内点，所以 $M_{AB}$ 完全在平行四边形 $ABCD$ 内. 平行四边形 $ABCD$ 的面积不小于这四个弓形面积之和.

由祖暅原理，弓形 $M_{AB}$、$M_{BC}$、$M_{CD}$、$M_{DA}$ 与凸形的四个相应的弓形面积对应相等. 从而

$$S_{\square ABCD}\geqslant\frac{1}{2}S.$$

注　凸形的内接平行四边形，面积有上界，因而有上确界. 有一串内接平行四边形，面积以此上确界为极限. 而由§2 例 15 注中所说的 Blaschke 定理，这串平行四边形收敛于一个凸形，它当然也是原凸形的内接平行四边形，而且面积即上述上确界. 因此，有一个面积最大的内接平行四边形. Blaschke 定理相当于连续函数的最大值定理.

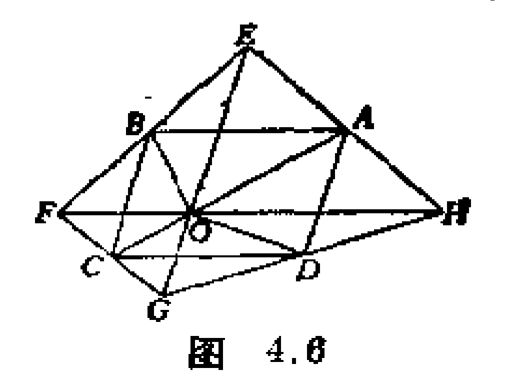


图　4.6

例 2 的结果是最佳的. 当凸形为四边形(三角形可作为一个顶点在边上的退化的四边形)时，连结四边中点所成的平行四边形面积最大，恰好等于四边形面积的 $\frac{1}{2}$. 并且，在最大的内接平行四边形面积为凸形的 $\frac{1}{2}$ 时，由上面的解法可知四个弓形 $M_{AB}$、$M_{BC}$、$M_{CA}$、$M_{AD}$ 恰好覆盖平行四边形 $ABCD$，没有重

叠，因而这时凸形必为图 4.6 所示的四边形(包括退化的情况)$EFGH$.

对于四边形，$\frac{1}{2}$ 可改进为 $\frac{2}{\pi}$. 1941 年匈牙利数学家 Sas 证明了凸形内的最大的 $n$ 边形，面积$\geqslant\left(\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}\right)S$，$S$ 是凸形的面积. 当且仅当凸形为椭圆时等号成立.

下面讨论将 $n$ 个单位正方形嵌入一个大正方形的问题.

设大正方形的边长的最小值为 $S(n)$，显然

$$\sqrt{n}\leqslant S(n)\leqslant\lceil\sqrt{n}\rceil, \tag{1}$$

这里 $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 表示不小于 $\sqrt{n}$ 的最小整数. 当且仅当 $n$ 为平方数时，(1)中等号成立.

对非平方数 $n$，仅有几个 $S(n)$ 的值为已知：$S(2)=S(3)=2$ (证明见《覆盖》§2 例 9). $S(5)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (图 4.7 表明 $S(5)\leqslant2+\frac{\sqrt{2}}{2}$). $S(7)=S(8)=S(9)=3$.

图 4.8 表明 $S(19)\leqslant4+\frac{2}{3}\sqrt{2}$. 我们有如下的表：

| $n$ | 11 | 18 | 19 | 27 | 28 | 38 | 52 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(n)\leqslant$ | $\frac{5}{2}+\sqrt{2}$ | $2+2\sqrt{2}$ | $4+\frac{2}{3}\sqrt{2}$ | $5+\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $3+2\sqrt{2}$ | $6+\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $7+\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

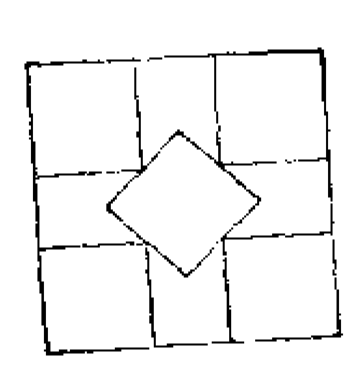


图 4.7

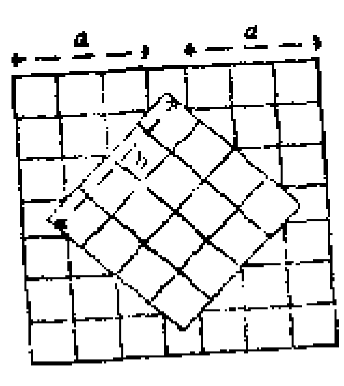



图 4.8

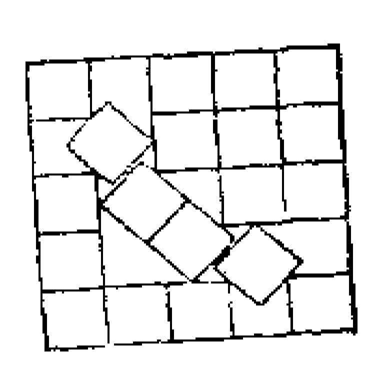


图 4.9

此外，图 4.9 表明当整数 $a$、$b$ 适合不等式

$$2a^2-2a<b^2<2a^2$$

时，$n=2a(a+1)+b^2$ 个单位正方形可以嵌入边长为 $a+1+\frac{b}{\sqrt{2}}$ 的正方形中.

例 3 研究将不一定全相等的正方形嵌入长方形的问题.

**例 3** 边长分别为 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots$，总面积为 $v$ 的正方形在 $a_1\geqslant a_2>x_1$，并且

$$x_1^2+(a_1-x_1)(a_2-x_1)\geqslant v \tag{2}$$

时，可以嵌入边长为 $a_1$、$a_2$ 的矩形内.

**证明** 将正方形依大小顺序一个接一个地放入 $a_1\times a_2$ 的矩形中.

先排第一行，边长为 $x_1$ 的旁边紧接着边长为 $x_2$ 的，这样排下去，直至无法再排. 然后在 $(a_1-x_1)\times a_2$ 的矩形中再排第二行. 依此类推，设第 $i$ 行排的第一个正方形边长为 $x_{k_i}$，则 $k_1=1$，并且对 $i=1, 2, 3, \cdots$，

$$a_1-x_{k_{i+1}}<\sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1}x_j\leqslant a_1. \tag{3}$$

第 $i$ 行的正方形的面积之和

$$\begin{aligned}S_i=\sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1}x_j^2&\geqslant x_{k_i}^2+x_{k_{i+1}}(a_1-x_{k_{i+1}}-x_{k_i})\\&\geqslant x_{k_i}^2-x_{k_{i+1}}^2+(a_1-x_1)x_{k_{i+1}}.\end{aligned} \tag{4}$$

求和得

$$v\geqslant x_1^2+(a_1-x_1)\sum_{i=1}^{\infty}x_{k_{i+1}}. \tag{5}$$

将(2)代入(5)并化简得

$$a_2\geqslant x_1+\sum_{i=1}^{\infty}x_{k_{i+1}}. \tag{6}$$

(6)表明一行接一行地排小正方形，各行的高的和不会超出 $a_2$，所以这些小正方形可以逐一嵌入 $a_1\times a_2$ 的矩形中（参见图4.10）.

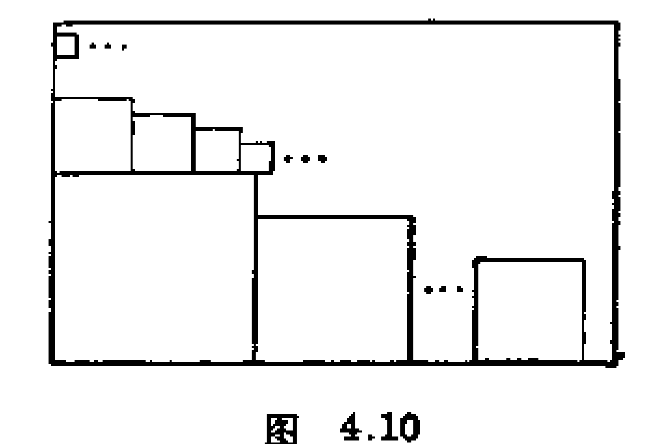


图 4.10

当 $a_1=a_2$ 时，由(2)得

$$a_1\geqslant x_1+\sqrt{v-x_1^2},\qquad (7)$$

而

$$x_1+\sqrt{v-x_1^2}\leqslant 2\sqrt{\frac{x_1^2+v-x_1^2}{2}}=\sqrt{2v},\qquad (8)$$

所以在(7)或 $a_1\geqslant\sqrt{2v}$ 成立时，所述的一串小正方形可以嵌入边长为 $a_1$ 的正方形中.

**例 4** 边长分别为 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots$，总面积为 $v$ 的正方形在 $a_1\geqslant a_2\geqslant x_1$ 并且

$$a_1a_2\geqslant 2v\qquad (9)$$

时，可以嵌入边长为 $a_1$、$a_2$ 的矩形内.

**证明** 如果 $x_1<\frac{a_2}{2}$，那么

$$x_1^2+(a_1-x_1)(a_2-x_1)=2\left(x_1-\frac{a_1}{2}\right)\left(x_1-\frac{a_2}{2}\right)+\frac{a_1a_2}{2}$$

$$\geqslant\frac{a_1a_2}{2}\geqslant v,$$

从而由例3，结论成立.

设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_t\geqslant\frac{a_2}{2}>x_{t+1}\geqslant\cdots$. 按照例3的做法将小正方形逐一放入矩形中，但现在每一行与长为 $a_2$ 的边平行.

显然 $x_{k_i}=x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$,

$$S_i = x_i^2 \geqslant \frac{a_2}{2} x_i, \quad i=1, 2, \cdots, t-1. \tag{10}$$

又类似于(4),

$$\begin{aligned} S_t &\geqslant x_t^2 - x_{k_{t+1}}^2 + (a_2 - x_t) x_{k_{t+1}} \\ &= -x_{k_{t+1}}^2 + \frac{a_2}{2}(x_t + x_{k_{t+1}}) + \left(x_t - \frac{a_2}{2}\right)(x_t - x_{k_{t+1}}) \\ &\geqslant -x_{k_{t+1}}^2 + \frac{a_2}{2}(x_t + x_{k_{t+1}}). \end{aligned} \tag{11}$$

$$S_i \geqslant x_{k_i}^2 - x_{k_{i+1}}^2 + \frac{a_2}{2} x_{k_{i+1}}, \quad i = t+1, t+2, \cdots \tag{12}$$

将(10)、(11)、(12)相加得

$$v \geqslant \frac{a_2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i}. \tag{13}$$

由(9)、(13)导出

$$a_1 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i}.$$

从而结论成立.

例3、例4可推广到高维空间. 用类似的手法还可以证明关于长方形的嵌入的下述结果:

一组边长 $\leqslant x_1$, 总面积为 $v$ 的长方形, 在 $a_1 \geqslant x_1$ 并且

$$a_1 a_2 \geqslant 2v + \frac{a_1^2}{8} \tag{14}$$

时, 可以嵌入 $a_1 \times a_2$ 的长方形.

作为例3的应用, 有

**例5** (i) 证明边长为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\cdots$的正方形可以嵌入边长为 $\frac{5}{6}$ 的正方形中.

(ii) 证明一组 $\frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1}$ $(k=1, 2, \cdots)$的矩形, 可以嵌入边长为 $\frac{31}{30}$ 的正方形中.

**证明** (i) 如图4.11，其中标号$i$表示所放正方形的边长是$\frac{1}{i}$，前19个正方形已经嵌入，大正方形还剩下$\frac{17}{60}\times\frac{4}{15}$的一块矩形．由于

$$\left(\frac{1}{21}\right)^2+\left(\frac{17}{60}-\frac{1}{21}\right)\left(\frac{4}{15}-\frac{1}{21}\right)>\frac{1}{20}>\sum_{i=21}^{\infty}\frac{1}{i^2},$$

根据例3，边长为$\frac{1}{21}$，$\frac{1}{22}$，…的正方形可以嵌入$\frac{17}{60}\times\frac{4}{15}$

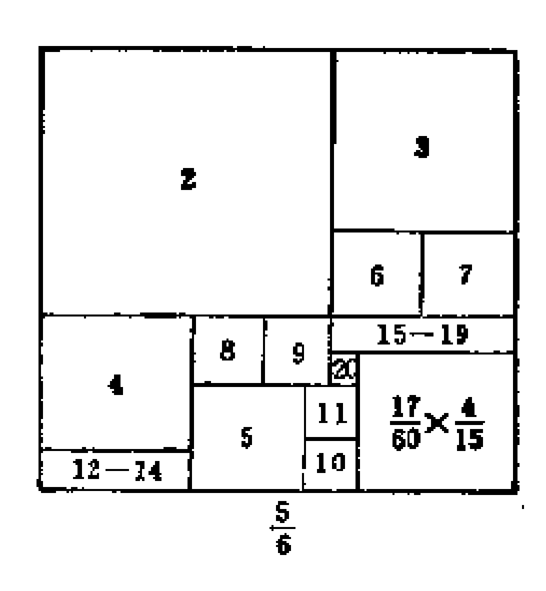
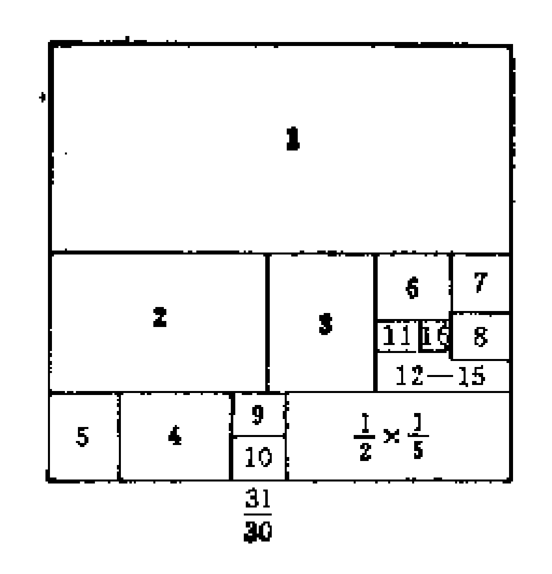



图 4.11




$$\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{17}+\frac{1}{8}<\frac{17}{60}$$

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{8}<\frac{17}{60}$$

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}<\frac{17}{60}.$$

图 4.12

的矩形中.

(ii) 如图4.12, 其中标号 $i$ 表示放 $\frac{1}{i}\times\frac{1}{i+1}$ 的矩形, 前16个矩形已经嵌入, 大正方形还剩下 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ 的一块矩形. 由于

$$\left(\frac{1}{17}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{17}\right)>\frac{1}{16}>\sum_{i=17}^{\infty}\frac{1}{i^2},$$

根据例3, 边长为 $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{18}$, …的正方形可以嵌入 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ 的矩形中, $\frac{1}{17}\times\frac{1}{18}$, $\frac{1}{18}\times\frac{1}{19}$, …的矩形当然更可以嵌入这个矩形中.

由《覆盖》§2 例9, 若正方形能嵌入边长为 $x_1$、$x_2$ 的两个正方形, 则它的边长 $\geqslant x_1+x_2$. 因此(i)是最佳的$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\right)$. 但(ii)不知是否最佳. 这类问题, 要求出最佳的结果, 往往是很困难的.

在单位正方形内嵌入 $n$ 个相等的圆, 这些圆的半径最大是多少? 在单位正方形内嵌入 $n$ 个点, 怎样使这些点之间的最小距离为最大? 这两个问题实际上是等价的. 如果单位正方形内有 $n$ 个点, 两两的距离至少为 $d$, 那么在边长为 $1+d$ 的正方形内就可嵌入 $n$ 个直径为 $d$ 的圆. 这种"胀缩"法在讨论嵌入问题时常常使用(上面的做法就是将点膨胀为圆, 单位正方形膨胀为边长为 $1+d$ 的正方形), 在《覆盖》一书中已举过不少例子.

因此, 下面只介绍在单位正方形内嵌入 $n$ 个点的问题. 设 $d_n$ 为这 $n$ 个点之间的最小距离的最大值. 我们有下表:

| $n$ | $d_n$ | $n$ | $d_n$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $\sqrt{2}=1.414\cdots$ | 16 | $\frac{1}{3}=0.333\cdots$ |
| 3 | $\sqrt{6}-\sqrt{2}=1.035\cdots$ | 17 | $0.306\cdots$ |
| 4 | 1 | 18 | $\frac{\sqrt{13}}{12}=0.300\cdots$ |
| 5 | $\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707\cdots$ | 19 | $0.290\cdots$ |
| 6 | $\frac{\sqrt{13}}{6}=0.601\cdots$ | 20 | $\frac{6-\sqrt{2}}{16}=0.287\cdots$ |
| 7 | $2(2-\sqrt{3})=0.536\cdots$ | 21 | $0.272\cdots$ |
| 8 | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=0.518\cdots$ | 22 | $2-\sqrt{3}=0.268\cdots$ |
| 9 | $\frac{1}{2}=0.5$ | 23 | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0.259\cdots$ |
| 10 | $0.42127\cdots$ | 24 | $\frac{2}{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}=0.254\cdots$ |
| 11 | $0.398\cdots$ | 25 | $\frac{1}{4}=0.25$ |
| 12 | $\frac{\sqrt{34}}{15}=0.389\cdots$ | 26 | $0.239\cdots$ |
| 13 | $\frac{\sqrt{3}-1}{2}=0.366\cdots$ | 27 | $\frac{\sqrt{89}}{40}=0.236\cdots$ |
| 14 | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}=0.345\cdots$ | | |
| 15 | $\frac{4}{8+\sqrt{2}+\sqrt{6}}=0.337\cdots$ | 36 | $\frac{1}{5}=0.2$ |

其中精确的值只有 $n\leqslant 9$, $n=14$, 16, 25, 36. $n=2$, 4, 5 的情况均很容易：$n=5$ 可通过将正方形等分为 4 个小正方形，利用抽屉原理有两个点在同一个小正方形中，从而 $d_5\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; $n=4$ 为下面的例 6. $n=3$ 的情况即求嵌入正方形

的最大的正三角形，见《覆盖》§1例8．$n=6$ 的情况是 Graham 建立的，证明已很复杂．$n=7$，8，9 是 Schaer 与 Meir 的结果．Wengerodt 与 Kirchner 解决了 $n=14$，16，25，36．

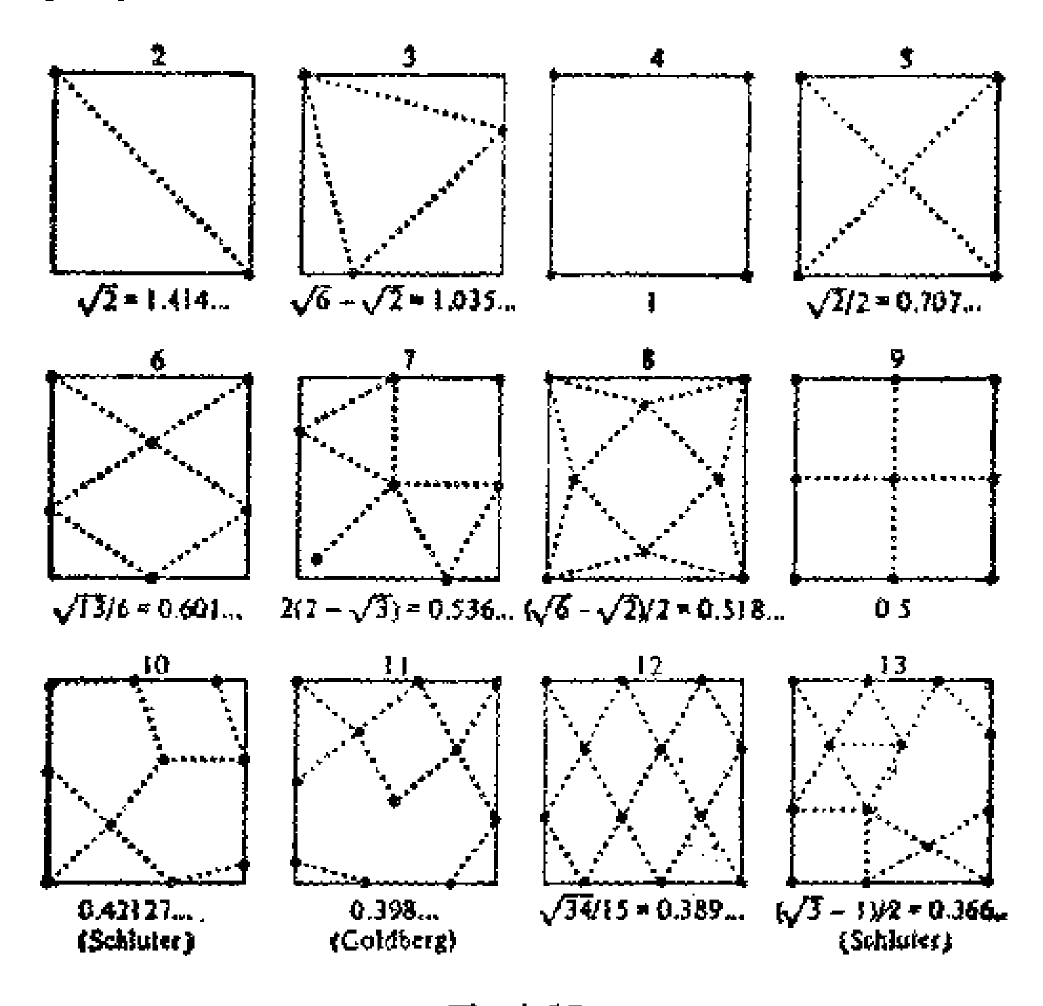



图 4.13

猜测表中所列的上界都是精确的．

对于平方数，$n=4$，9，16，25，36 时，将正方形等分为 $(\sqrt{n}-1)^2$ 个小正方形，小正方形的 $n$ 个顶点恰好使最小距离达到最大值 $d_n$．但 Wengerodt 找到 $n=64$ 点，它们之间的最小距离大于等分时小正方形的顶点之间的最小距离．猜测 $n=49$ 时，小正方形的顶点之间的最小距离仍达到最大值

$d_{49}$.

如果在正三角形中放 $n$ 个点，Oler 证明了在 $n$ 为三角数$\left(\text{即形如}\ \frac{1}{2}m(m+1)\text{的数}, m\in N\right)$时，将正三角形等分为小正三角形，小正三角形的全部 $n$ 个顶点，恰好使每两点之间的最小距离达到最大值.

**例 6** 证明单位正方形内任意四点中必有两点的距离 $\leqslant$ 1.

**证明** 我们证明更强一点的结论：半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆内任意四点中必有两点的距离 $\leqslant 1$.

设 $A$、$B$ 为其中两点，且 $AB\geqslant 1$，又设半径 $OA'$、$OB'$ 分别过 $A$、$B$（图 4.14）. $\triangle OA'B'$ 的"直径"（即 $\triangle OA'B'$ 中每两点的距离的最大值）是它的最大边，由于 $OA'=OB'=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，所以 $A'B'$ 是直径，并且 $A'B'\geqslant AB$.

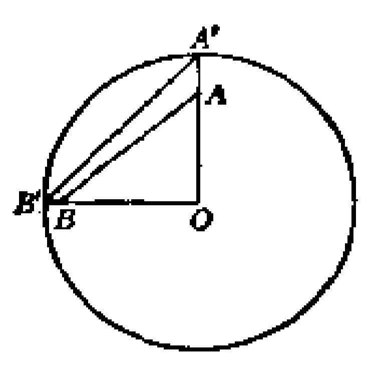


图 4.14

因此，可以假定四个点都在圆周上（必要时用 $A'$、$B'$ 代替 $A$、$B$，两点间的距离不会减少）.

如果每两点距离 $\geqslant 1$，那么每相邻两点之间的（劣）弧不小于 $\frac{1}{4}$ 圆周，从而相邻两点间的弧恰等于 $\frac{1}{4}$ 圆周，每两点之间的距离的最小值恰等于 1.

因此，任意四点中必有两点的距离 $\leqslant 1$. 当且仅当四点为圆内接正方形，每两点之间的距离至少为 1.

对于圆来说，下面的四个问题等价：

$n$ 个相等的圆能嵌入单位圆中，圆半径的最大值是多少？

$n$ 个单位圆能嵌入一个圆中，这圆的半径至少多大？

在单位圆中取 $n$ 个点，每对点之间的距离的最小值至多多大？

在一圆中有 $n$ 个点，每两点之间距离 $\geqslant 1$，这圆的半径至少多大？

采用第三个问题的说法，记所说最小值的最大值为 $d_n$。在 $2\leqslant n\leqslant 6$ 时，$d_n=2\sin\frac{\pi}{n}$，并且在 $n$ 个点构成圆内接正 $n$ 边形时达到最大值．在 $7\leqslant n\leqslant 9$ 时，$d_n=2\sin\frac{\pi}{n-1}$，在 $n$ 个点中一点为圆心，其余点成圆内接正 $n-1$ 边形时达到最大值．U. Pirl 在 1969 年证明了

$$0.710<d_{10}<0.765.$$

在《覆盖》一书中已对上面的问题进行过讨论．

嵌入的点集，除讨论其两点间距离最小值的最大值外，还可以对其他有关的量进行研究．

**例 7** 在单位正方形中，任取三点，求证这三点所成三角形的内切圆，半径 $<\frac{\sqrt{5}-1}{4}$．

**证明** 让三角形在正方形中移动(或等价地让正方形移动，但始终覆盖这三角形)，可使三角形有一个顶点与正方形的顶点重合．

设 $\triangle AEF$ 与正方形 $ABCD$ 的顶点 $A$ 重合．

注意 $\triangle AEF$ 的一角固定时，夹角两边只要有一边增加，那么内切圆的半径必定增加．因此，可设 $E$、$F$ 都在正方形的边上(必要时延长 $AE$、$AF$)．

这时有四种情况：

(1) $E$、$F$ 分别在 $AB$、$AD$ 上．易知(图 4.15)

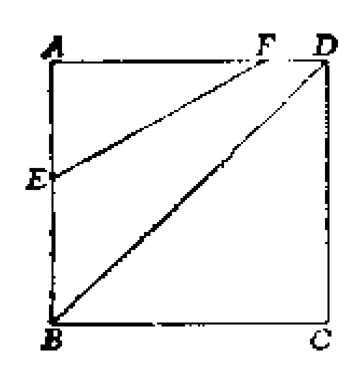


图 4.15

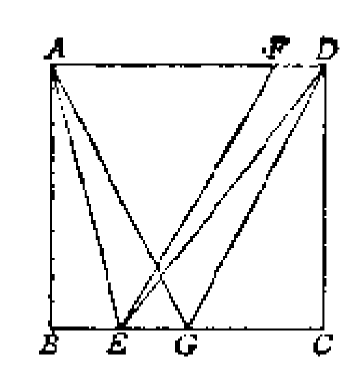


图 4.16

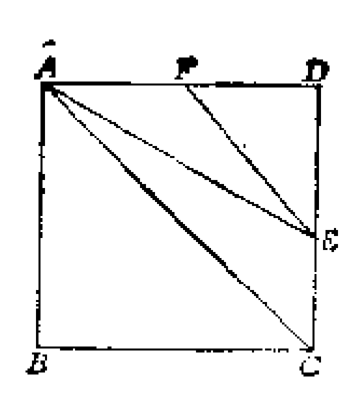


图 4.17

$$r \leqslant \triangle ABD \text{ 的内切圆半径}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.2928\cdots < \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

(ii) $E$、$F$ 分别在 $BC$、$AD$ 上. 易知(图 4.16)

$$r \leqslant \triangle AED \text{ 的内切圆半径}.$$

设 $BC$ 中点为 $G$, 则

$$GA+GD \leqslant EA+ED$$

(延长 $DC$ 到 $D'$, 使 $CD'=DC$. 易知 $GA+GD=AD'$, 而 $EA+ED=EA+ED' \geqslant AD'$), 而 $\triangle AED$、$\triangle AGD$ 面积相等, 所以

$$\triangle AED \text{ 的内切圆半径} \leqslant \triangle AGD \text{ 的内切圆半径},$$

$$r \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

(iii) $E$、$F$ 分别在 $CD$、$AD$ 上. 易知(图 4.17)

$$r \leqslant \triangle AED \text{ 的内切圆半径}$$

$$\leqslant \triangle ACD \text{ 的内切圆半径}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

(iv) $E$、$F$ 分别在 $BC$、$CD$ 上. 这是最困难的情况.

如果 $AF > EF$ (图 4.18), 那么作 $AE$ 的垂直平分线交 $FD$ 于 $F'$(因为 $DE > DC = DA$, 所以 $F'$ 必在 $F$、$D$之间), 再

作 $FF''\parallel EA$ 交 $AE$ 的垂直平分线于 $F''$，则 $\triangle F''AE$ 与 $\triangle FAE$ 面积相等．易知 $F''A+F''E<FA+FE$（理由与(11)中 $GA+GD\leqslant EA+ED$ 相同），所以

$$\triangle AEF \text{ 的内切圆半径} < \triangle AEF'' \text{ 的内切圆半径}$$
$$\leqslant \triangle AEF' \text{ 的内切圆半径}.$$

因此，可假定 $AF\leqslant EF$（否则用 $F'$ 代替 $F$），$AE\leqslant EF$.

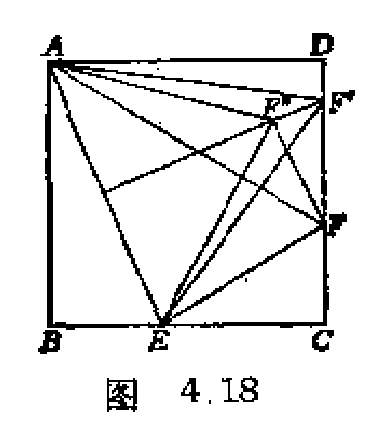


图 4.18

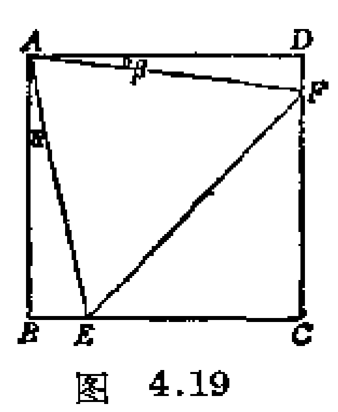


图 4.19

在图 4.19 中，设 $\angle BAE=\alpha$，$\angle FAD=\beta$，$\alpha\geqslant\beta$．在 $\triangle AEF$ 中，$\angle EAF\geqslant 60°$，因此

$$\alpha+\beta\leqslant 30°. \tag{15}$$

由于
$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\times AF\times\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\frac{1}{2}\sec\alpha\sec\beta\cos(\alpha+\beta),$$

所以

$$r=\frac{\sec\alpha\sec\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sec\alpha+\sec\beta+\sqrt{(1-\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\beta)^2}}$$
$$=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta+\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)}}.$$

因为
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\geqslant 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1+\cos(\alpha+\beta),$$

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)\\
&\quad=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&\qquad-(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\sin(\alpha+\beta)\\
&\quad=1+\cos(\alpha-\beta)(\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta))\\
&\qquad-\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)\\
&\quad\geqslant 1+\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta))\\
&\qquad-\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)\\
&\quad=1+\cos^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\\
&\quad=(\sqrt{5}\cos(\alpha+\beta)-1)^2\\
&\qquad+2\cos(\alpha+\beta)(\sqrt{5}-2\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta))\\
&\quad\geqslant(\sqrt{5}\cos(\alpha+\beta)-1)^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\cos\alpha+\cos\beta+\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)}\\
&\quad\geqslant 1+\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{5}\cos(\alpha+\beta)-1\\
&\quad=(1+\sqrt{5})\cos(\alpha+\beta),
\end{aligned}
$$

$$
r\leqslant\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.
$$

等号当且仅当 $\beta=0$，$\alpha=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$时成立.

综上所述，当且仅当三角形如图4.16所示的$\triangle AGD$时，$r$取得最大值$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

本题是罗马尼亚 L. Funar 1984年提出的．上面所给证明的最后一步($\alpha+\beta\leqslant 30^\circ$ 的情况)主要基于郭军伟同学的想法．他当时(1995年)是浙江东阳中学高三学生．这一问题曾被匡继昌先生作为“100个未解决的问题”收入《常用不等式》一书中.

点集中每三点所成三角形的面积更是经常讨论的.

**例 8** 证明 $\triangle ABC$ 中，任给五点，必有三点所成三角形的面积 $\leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

**证明** 如图 4.20，三条中位线将 $\triangle ABC$ 分成四个小三角形，每个面积为 $\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

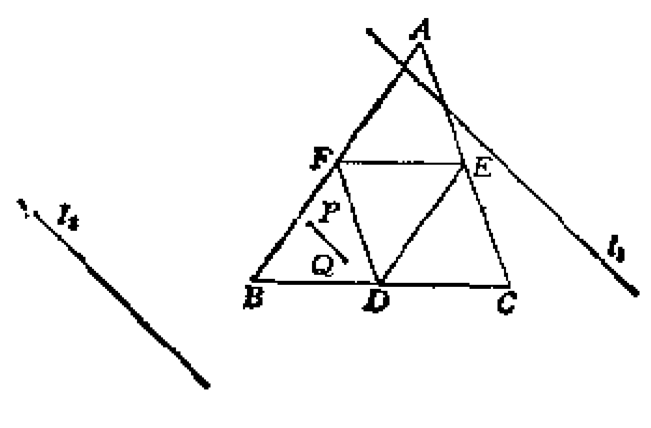


图 4.20

如果 $\triangle DEF$ 中有两个给定的点，那么无论第三个点在哪个小三角形中，这点及前两点组成的三角形在一个平行四边形，比如说平行四边形 $AFDE$ 中，所以这三角形面积 $\leqslant \frac{1}{2} S_{\square AFDE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

如果 $\triangle DEF$ 中至多一个给定的点，那么其余三个三角形中有四个给定的点，由抽屉原理，必有一个三角形中含有两个(或更多个)给定的点.

不妨设 $\triangle BDF$ 中有两个给定的点 $P$、$Q$. 与 $P$、$Q$ 构成面积 $\leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$ 的三角形的点必在与 $PQ$ 平行的两条直线 $l_1$、$l_2$ 所围成的带形内.

由于 $S_{\triangle BPQ}$、$S_{\triangle EPQ} \leqslant \frac{1}{2} S_{\square BFED} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$，所以 $B$、$E$ 都在带形内. 同理 $F$、$D$ 也在 $l_1$、$l_2$ 之间.

由于 $\frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \geqslant 2S_{\triangle EPQ} = S_{\triangle APQ} + S_{\triangle CPQ}$,

所以 $S_{\triangle APQ}$、$S_{\triangle CPQ}$ 中必有一个 $\leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$，即 $A$、$C$ 必有一点在带形内.

不妨设 $C$ 在带形内，这时梯形 $BCEF$ 都在带形内. $\triangle ABC$ 只有 $\triangle AEF$ 的一部分可能在带形外.

若 $\triangle AEF$ 中有三个给定的点，则它们所成三角形的面积 $\leqslant S_{\triangle AEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$. 若 $\triangle AEF$ 中至多两个给定的点，则带形中除 $P$、$Q$ 外，至少还有一个给定的点，它与 $P$、$Q$ 构成的三角形面积 $\leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

本例的 5 点不能改成 4 点. $\triangle ABC$ 的三个顶点及重心 $G$ 中每三点所成三角形的面积 $\geqslant \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$.

例 8 中 $\frac{1}{4}$ 还可改进，见研究问题 18.

对于凸形，我们有类似的结论.

**例 9** 设凸形 $M$ 的面积为 1，在 $M$ 中任给六点，证明其中必有三点所成三角形的面积 $\leqslant \frac{1}{4}$.

**证明** 设 $A$ 为给定的一点，过 $A$ 作直线 $l$. 如果 $l$ 不平分凸形 $M$ 的面积，不妨设 $l$ 左侧的面积大于 $l$ 右侧的面积. 让 $l$ 绕 $A$ 旋转，转过 180° 后，$l$ 左侧的面积小于 $l$ 右侧的面积. 因此，在旋转过程中必有一个位置 $l$ 正好平分凸形 $M$ 的面积.

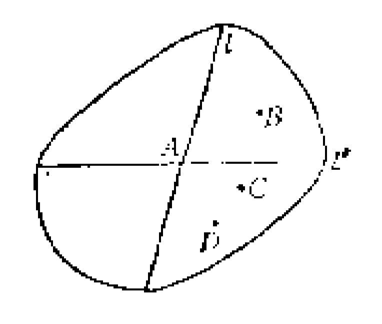


图 4.21

设 $l$ 平分 $M$ 的面积. 除 $A$ 外其余五点中必有 3 点在 $l$ 的同一侧. 不妨设 $B$、$C$、$D$ 在 $l$ 的右侧(图 4.21).

再过 $A$ 作一条直线 $l'$ 平分 $l$ 右侧的凸形的面积，所分成的两部分中必有一个含 $B$、$C$、$D$ 中的两点．设为 $C$、$D$，则 $\triangle ACD$ 的面积 $\leqslant\frac{1}{4}$．

六点改为五点，结论未必成立．例如正五边形的五个顶点，其中任三点所成三角形的面积都大于五边形面积的 $\frac{1}{4}$．

另一方面，对于四个点，例 9 的结论一定不成立，即

**例 10** 每个面积为 1 的凸形 $M$ 中，都可以找到四个点，每三点所成三角形的面积大于 $\frac{1}{4}$．

**证明** 由例 2，凸形 $M$ 中有一平行四边形 $ABCD$，它的面积 $\geqslant\frac{1}{2}$，并且等号仅在 $M$ 为四边形时成立．

因此，当 $M$ 不是四边形时，$A$、$B$、$C$、$D$ 四点即为所求．这四点中每三点所成三角形的面积 $=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}>\frac{1}{4}$．

当 $M$ 是四边形 $EFGH$ 时，如果这四边形是平行四边形，那么 $E$、$F$、$G$、$H$ 即为所求．否则，设直线 $EH$、$FG$ 相交于 $P$（图 4.22）．

作 $EF$ 的平行线 $m$ 交四边形 $EFGH$ 的边界于 $E_1$、$F_1$．

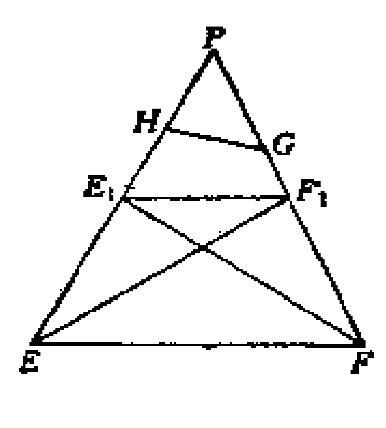


图 4.22

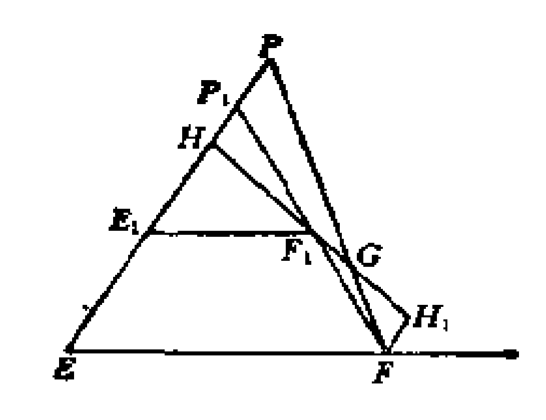


图 4.23

平行移动 $m$ 直至 $E_1F_1=\frac{1}{2}EF$ (当 $m$ 由 $EF$ 向 $P$ 平移时，$E_1F_1$ 由 $EF$ 减少至零，其中必有一时刻 $E_1F_1=\frac{1}{2}EF$).

在图 4.22 中，$E$、$F$、$F_1$、$E_1$ 即为所求四点. 事实上

$$S_{\triangle E_1EF}=S_{\triangle F_1EF}>S_{\triangle EE_1F_1}=S_{\triangle FE_1F_1}=\frac{1}{4}S_{\triangle PEF}>\frac{1}{4}. \tag{16}$$

在图 4.23 中，延长 $FF_1$ 交 $PE$ 于 $P_1$，由于 $S_{\triangle F_1P_1H}>S_{\triangle F_1FG}$(过 $F$ 作 $FH_1 /\!/ HP_1$，$FH_1$ 交直线 $HG$ 于 $H_1$，则由于 $E_1F$ 是 $\triangle P_1EF$ 的中位线，$F_1F=F_1P_1$，所以 $S_{\triangle F_1P_1H}=S_{\triangle F_1FH_1}$. 因为 $FG$ 与 $HP_1$ 的延长线相交，所以 $G$ 在 $H_1$、$F_1$ 之间)，所以 $S_{\triangle P_1EF}>S_{EFGH}=1$. 因此上面的论证仍然有效(只需将(16)中的 $P$ 改为 $P_1$).

例 8、例 9 中的 $\frac{1}{4}$ 并非最佳，可以证明在凸形为三角形、凸四边形、凸五边形时，$\frac{1}{4}$ 分别可改为 $(\sqrt{2}-1)^2$，$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$，$\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})$(研究问题 18、19、20).

最后介绍一个立体几何中的问题，这个问题是 Rupert 王子提出的.

**例 11** 可以穿过单位立方体的立方体最多有多大? 即单位立方体的内接正方形最大有多大(以这个正方形为底的立方体通过依照与这底垂直的方向穿过这个正方形的洞)?

**解** 设内接正方形与侧面 $ABCD$ 相交于 $EF$.

若 $E$、$F$ 分别在正方形 $ABCD$ 的对边 $AB$、$CD$ 上，且内接正方形与另一侧面 $A_1B_1C_1D_1$ 相交于 $E_1F_1$，$E_1$、$F_1$ 分别在 $A_1B_1$、$C_1D_1$ 上(图 4.24). 设 $EB=a$，$E_1B_1=b$，$F_1C_1=c$，$FC=d$，则由 $EE_1^2=E_1F_1^2$ 得 $(a-b)^2=(b-c)^2$. 同理得

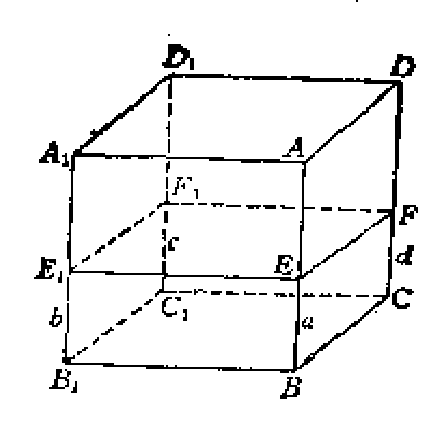


图 4.24

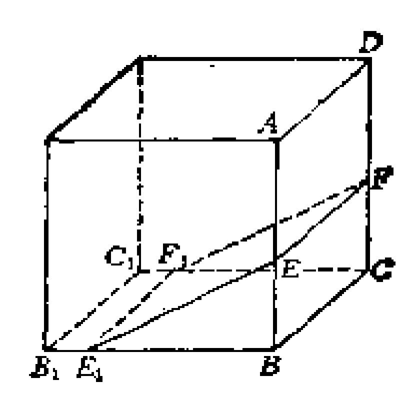


图 4.25

$$(b-c)^2=(c-d)^2=(d-a)^2=(a-b)^2. \tag{17}$$

又由 $EF_1=E_1F$ 得

$$(a-c)^2=(b-d)^2. \tag{18}$$

由(17)、(18)易得 $a=c$, $b=d$. 于是 $EF_1=BC_1=\sqrt{2}$. 从而正方形 $EE_1F_1F$ 的边长为 1.

若 $E$、$F$ 分别在正方形 $ABCD$ 的对边 $AB$、$CD$ 上，且内接正方形与底面相交于 $E_1F_1$, $E_1$、$F_1$ 分别在 $B_1B$、$C_1C$ 上，则由于 $EF\parallel E_1F_1$, 所以它们均与 $BC$ 平行，从而 $EF=BC=1$(图 4.25).

若 $E$、$F$ 分别在正方形 $ABCD$ 的邻边 $BC$、$CD$ 上，且内接正方形与另一侧面 $A_1B_1C_1D_1$ 相交于 $E_1F_1$, $E_1$、$F_1$ 分别在 $B_1C_1$、$C_1D_1$ 上，则情况与图 4.25 相同(图 4.26).

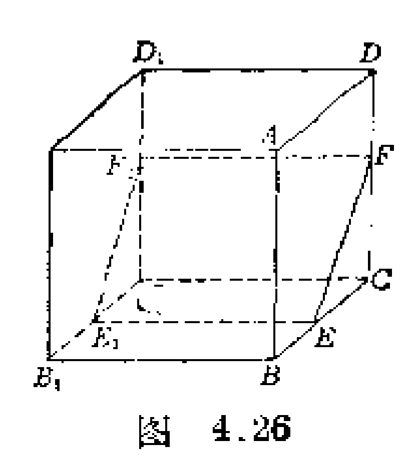


图 4.26

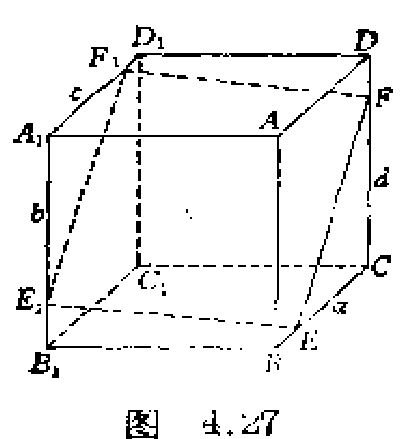


图 4.27

若 $E$、$F$ 分别在正方形 $ABCD$ 的邻边 $BC$、$CD$ 上，且内接正方形与侧面 $A_1B_1C_1D_1$ 相交于 $E_1F_1$，$E_1$、$F_1$ 分别在 $A_1B_1$、$A_1D_1$ 上(图 4.27)，设 $CE=a$，$E_1A_1=b$，$A_1F_1=c$，$FC=d$，则由正方形四边相等，

$$a^2+d^2=b^2+c^2=(1-a)^2+(1-b)^2+1$$
$$=(1-c)^2+(1-d)^2+1. \qquad (19)$$

由(19)得

$$(a-c)(a+c)=(b-d)(b+d), \qquad (20)$$

及

$$(a-c)(2-a-c)=-(b-d)(2-b-d), \qquad (21)$$

从而 $a=c$，$b=d$. 代入(19)得 $a+b=\frac{3}{2}$.

又由 $EF_1=E_1F$ 得

$$2+(1-b-d)^2=2+(1-c-a)^2,$$

所以 $a=b=\frac{3}{4}$. 这时正方形 $EE_1F_1F$ 的边长为 $\frac{3}{4}\sqrt{2}=1.0607\cdots$.

因此，所求的最大的正方形边长为 $\frac{3}{4}\sqrt{2}$，位置如图 4.27，其中 $CE=CF=A_1E_1=A_1F_1=\frac{3}{4}$.

# §5 分解与拼补

"只见桌上大白布上钉满了几千枚绣花针，几千片碎片已拼成一幅完整无缺的大地图，难得的是几千片碎皮拼在一起，既没多出一片，也没少了一片。"

——金庸《鹿鼎记》第三十四回

一个图形，在一定条件下，可以分解成(剪成)若干个具有指定性质的图形．反过来，若干给定的图形也可以拼补成形形色色的图形．

我国古代数学家很早就用这一方法证明勾股定理．例如图 5.1 是三国时代东吴赵爽的勾股圆方图．

弦的平方 $c^2$ 是图中斜放的正方形(的面积)，拼上 4 个同样的直角三角形$\left(每个面积为 \frac{1}{2}ab\right)$，构成一个大正方形，面积为 $(a+b)^2$．因此

图 5.1

$$(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab,$$

即

$$a^2+b^2=c^2.$$

**例1** 设 $n$ 为大于 1 的自然数，一个矩形的边长为 $a$、$b$，$a\geqslant b$. 如果这个矩形能分解成 $n$ 个与原矩形相似的矩形，试确定 $a$ 与 $b$ 之间的关系.

**解** 图 5.2、5.3、5.4 表明任一矩形可以分成 6、7、8 个与它相似的矩形.

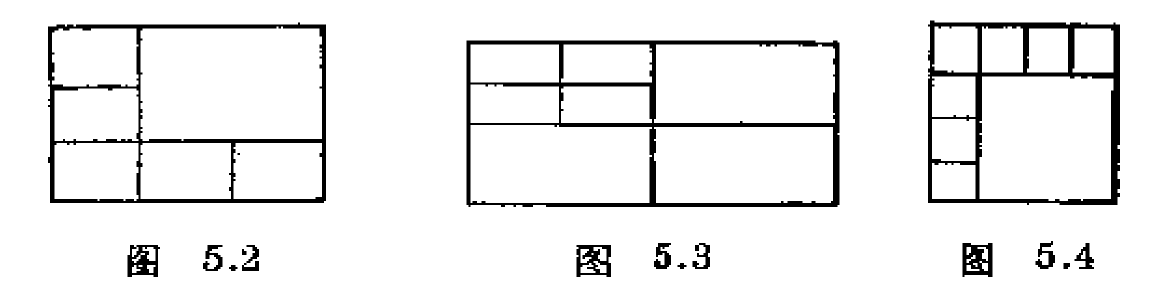


图 5.2　　图 5.3　　图 5.4

图 5.3 的左上角还表明每个矩形可以分成 4 个与它相似的矩形. 在图 5.2、图 5.3、图 5.4 中将一个矩形再分成 4 个相似的矩形，如此继续下去，每次增加 3 个矩形. 图 5.2 产生出 6, 9, 12, … 个相似的矩形；图 5.3 产生出 7, 10, 13, … 个相似的矩形；图 5.4 产生 8, 11, 14, … 个相似的矩形. 因此，除了 $n=2$、3、5，每个矩形都可以分解成 $n$ 个与它自身相似的矩形.

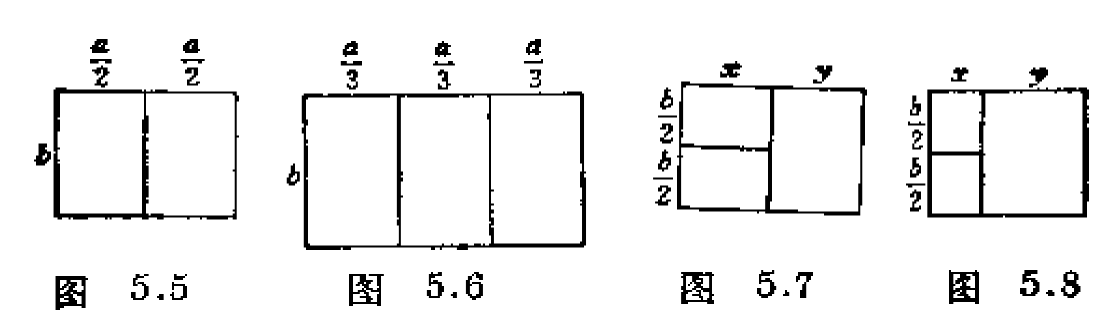



图 5.5　　图 5.6　　图 5.7　　图 5.8

当 $n=2$ 时，如图 5.5，由 $\frac{a/2}{b}=\frac{b}{a}$ 即得 $a=\sqrt{2}b$.

当 $n=3$ 时，有三种情况. 在图 5.6 中，$a=\sqrt{3}b$；在图 5.7 中，$x=\frac{a}{2}=y$，由 $\frac{a/2}{b}=\frac{b}{a}$ 得 $a=\sqrt{2}b$；在图 5.8 中，

$$\begin{cases}\dfrac{x}{b/2}=\dfrac{b}{a},\\[2mm] \dfrac{y}{b}=\dfrac{b}{a},\end{cases}$$

所以 $\dfrac{2a}{b}=\dfrac{2(x+y)}{b}=\dfrac{b+2b}{a}=\dfrac{3b}{a}$, $a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,b$.

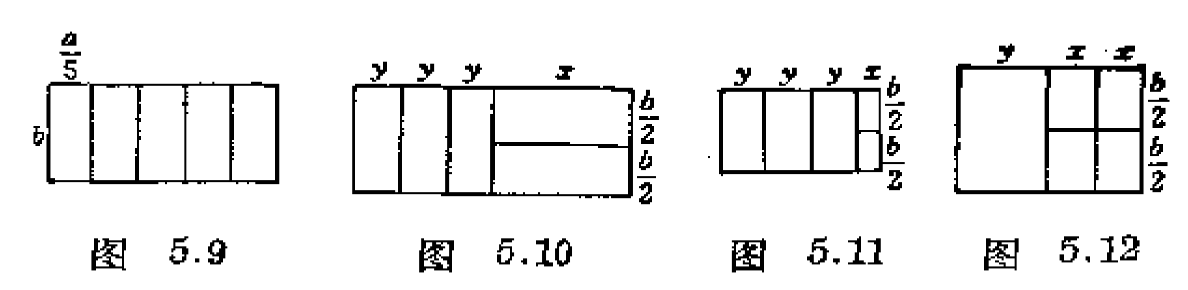



图 5.9　　图 5.10　　图 5.11　　图 5.12

当 $n=5$ 时，有四种情况．在图 5.9 中，$a=\sqrt{5}\,b$；在图 5.10 中，$x=\dfrac{a}{2}$，$y=\dfrac{a}{6}$，$\dfrac{y}{b}=\dfrac{b}{a}$，所以 $a=\sqrt{6}\,b$；在图 5.11 中，$\dfrac{y}{b}=\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{x}{b/2}=\dfrac{b}{a}$，所以 $x=\dfrac{y}{2}$，$y=\dfrac{2a}{7}$，$a=\sqrt{\dfrac{7}{2}}\,b$；在图 5.12 中，$x=\dfrac{y}{2}$，$y=\dfrac{a}{2}$，$a=\sqrt{2}\,b$．

从例 1 可以推出：一个正方形可分成 $n$ 个正方形的充分必要条件是 $n\neq 2, 3, 5$．

对任意自然数 $n>1$，每个矩形显然能分成 $n$ 个全等的、因而也是彼此相似的矩形(不与原矩形相似)，这只需将一边 $n$ 等分，并过分点作邻边的平行线即可．但对三角形，问题要复杂得多．

**例 2**　试确定有哪些自然数 $n$，可以使得任一个三角形都能分成 $n$ 个彼此相似的三角形？

**解**　如果将 $\triangle ABC$ 的每一边 $k$ 等分($k$ 为任一大于 1 的自然数)，并过每一分点作其他两边的平行线，那么就得到 $k^2$ 个全等(因而也是相似)的三角形，如图 5.13 所示．

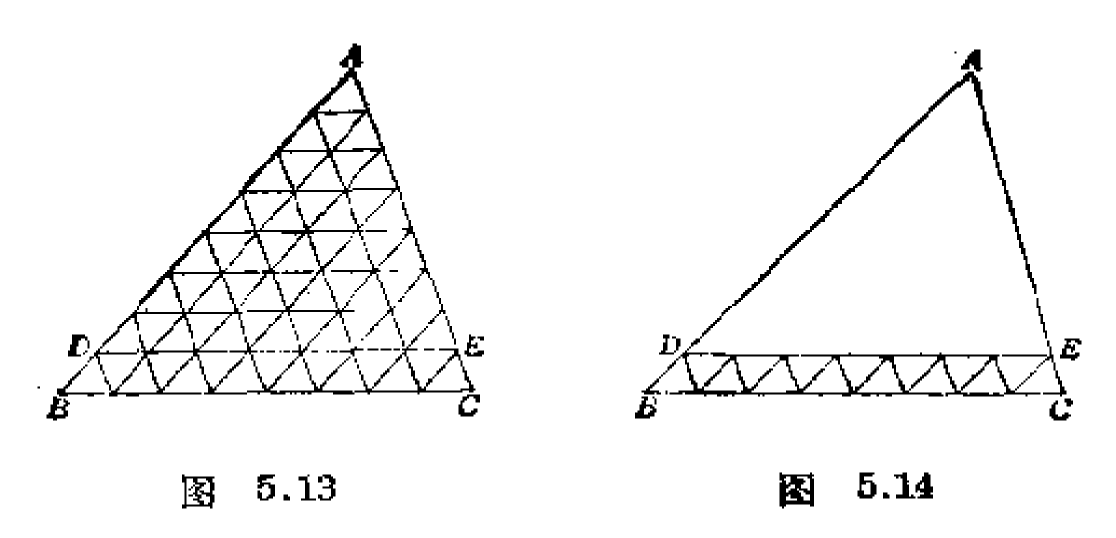


图 5.13　　　　图 5.14

在图5.13中，$DE$ 与 $BC$ 之间有

$$k^2-(k-1)^2=2k-1$$

个三角形．因此，在图5.14中，共有 $2k$ 个相似三角形．

在图5.14中，连结 $\triangle ADE$ 的三条中位线，$\triangle ADE$ 便分为4个相似三角形，从而 $\triangle ABC$ 被分为 $2k+3$ 个相似三角形．

于是，任一三角形 $ABC$ 可分为 $n$ 个相似三角形，只要 $n\neq 2, 3, 5$（其余的数都可以写成 $2k$ 或 $2k+3$ 的形式，$k>1$）．

下面说明 $n=2, 3, 5$ 时，并非任一个三角形都能分成 $n$ 个三角形．

先看 $n=2$ 的情况．

设 $\triangle ABC$ 被分为两个相似的三角形．这时必有一个角被分开，不妨设 $\angle BAC$ 被 $AD$ 分开，$D$ 在 $BC$ 上．

由于 $\angle BDA>\angle DAC$ 与 $\angle DCA$，而 $\triangle BDA$ 与 $\triangle ADC$ 相似，所以 $\angle BDA=\angle ADC=90°$．

如果 $\angle BAD=\angle CAD$，那么 $\triangle ABC$ 是等腰三角形（图5.15）；

如果 $\angle BAD=\angle ACD$，那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形（图

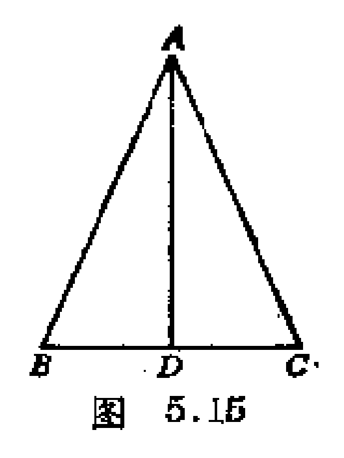


图 5.15

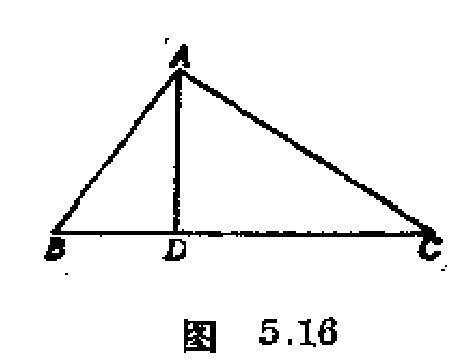


图 5.16

5.16).

因此，只有等腰三角形或直角三角形可以分为两个相似的三角形(这两个相似三角形都必须是直角三角形).

再看 $n=3$ 的情况.

$\triangle ABC$ 被分为三个三角形，只有五种可能：

在图 5.17 中，$\angle BDC=\angle BAC+\angle ABD+\angle ACD$，所以分成的三个三角形相似时，必有 $\angle BDC=\angle ADB=\angle ADC=120°$，并且易知 $AD=DB=DC$，从而 $\triangle ABC$ 是正三角形.

在其他图中，$AD$ 将 $\triangle ABC$ 分为两个三角形，即 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$，$\triangle ADC$ 将再分为两个三角形，它们均与 $\triangle ABD$ 相似. 根据对 $n=2$ 的讨论，**这三个三角形都是直角三角形**. 若 $\angle ABD=90°$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，而且易知 $\angle ACB=30°$(图 5.18). 若 $\angle ADB=90°$，则 $\triangle ABC$ 为等

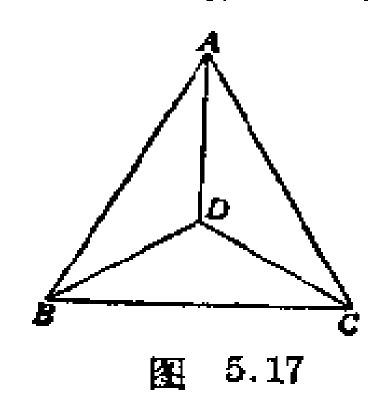


图 5.17

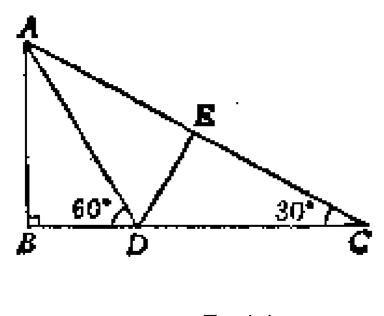


图 5.18

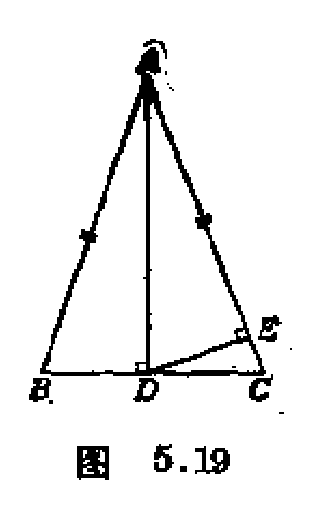


图 5.19

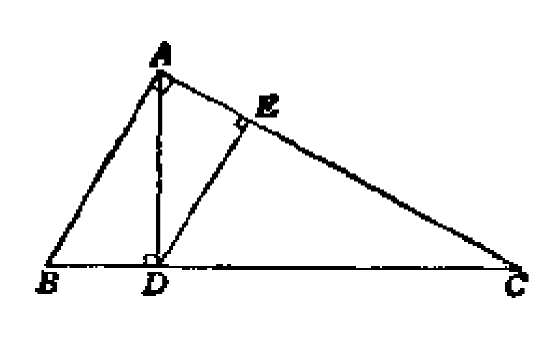


图 5.20

腰或直角三角形(图5.19与5.20). 若$\angle BAD=90°$, 则$\angle BAC=120°$,并且$AB=AC$(图5.21).

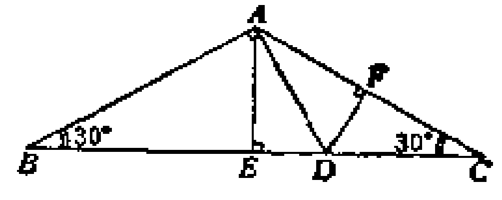


图 5.21

综上所述,只有$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形时,可以分成三个相似三角形.

接下去我们考虑一下如何将三角形分成四个相似的三角形.

首先,任意的三角形都可以按照图5.22与5.23分成四个相似三角形,它们都与原三角形相似.

此外,对于某几种特殊的三角形尚有其他的分法,如图5.24至图5.31所示.

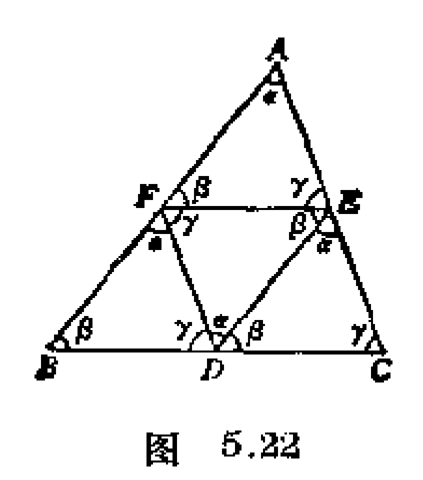


图 5.22

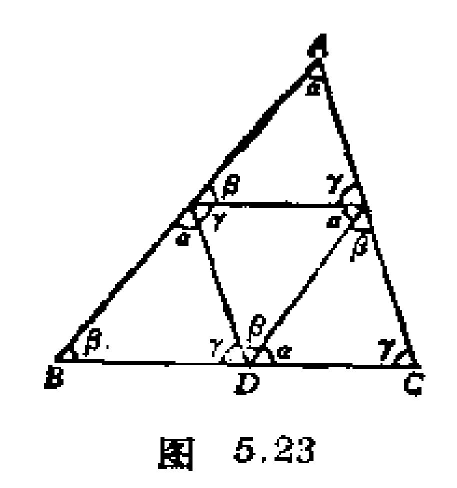
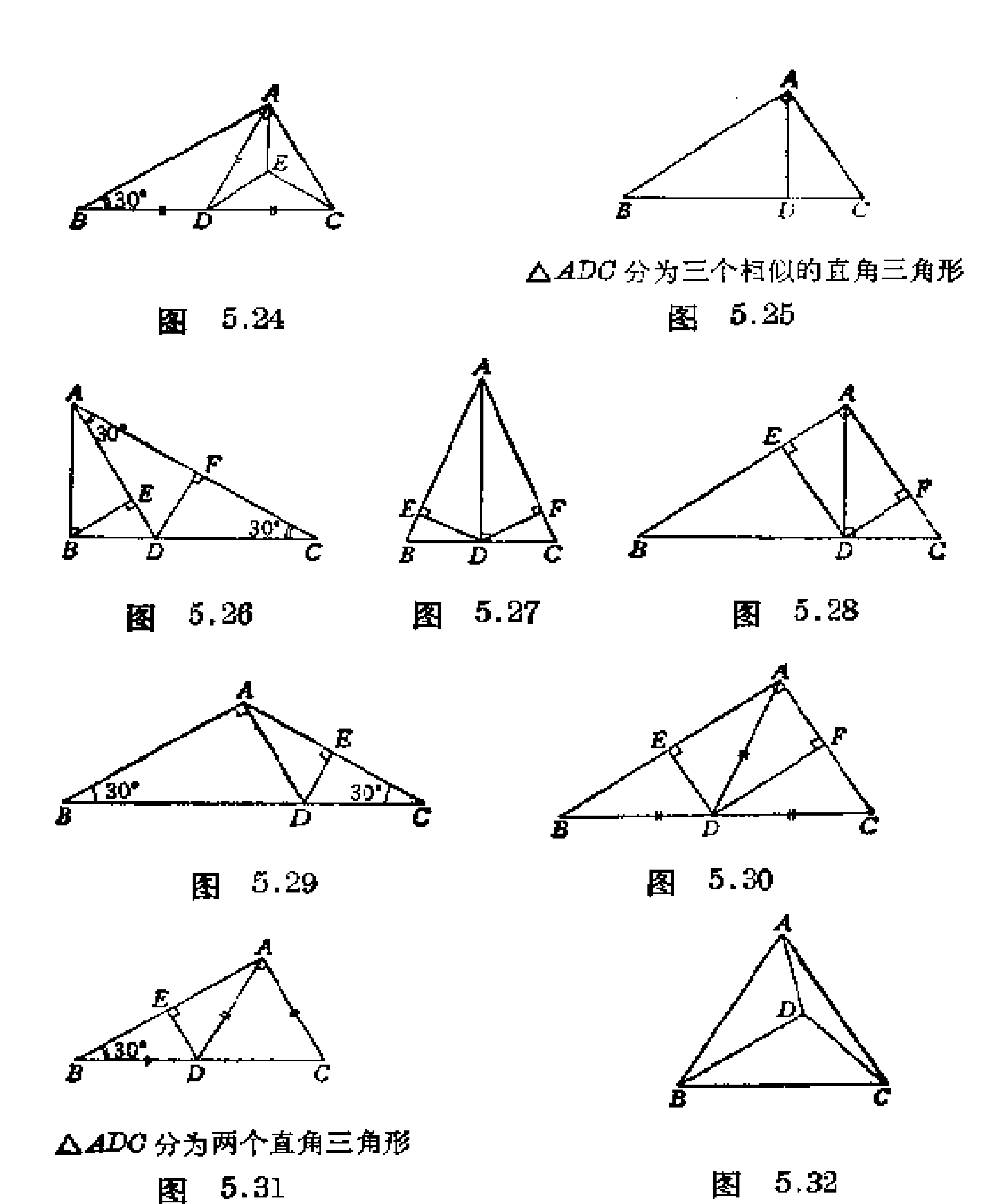


图 5.23




$\triangle ADC$ 分为三个相似的直角三角形

图 5.24

图 5.25

图 5.26

图 5.27

图 5.28

图 5.29

图 5.30

$\triangle ADC$ 分为两个直角三角形

图 5.31

图 5.32

不难验证，将三角形分为四个相似三角形的分法仅有上述诸种(其他分法，例如图 5.32 中，若 $\triangle BDC$ 分为两个相似三角形，则它们都是直角三角形，而 $\angle ADB$、$\angle ADC$ 中必有一个为钝角，因而 $\triangle ADB$、$\triangle ADC$ 不可能都与直角三角形相似)。

现在考虑 $n=5$ 的情况.

设 $\triangle ABC$ 不是等腰三角形，也不是直角三角形. 如果它能分成五个相似的三角形，我们研究一下有几种可能.

图 5.33 中，$\triangle DEF$ 或 $\triangle BDF$ 再分成两个三角形，所得五个三角形相似，根据 $n=2$ 的讨论，这五个三角形都是直角三角形. 不妨设 $\angle AEF=\angle EDC=90°$，则 $\angle FAE$ 与 $\angle ECD$ 相等或互余. 与 $\triangle ABC$ 的假定矛盾.

图 5.34 中，$\triangle BDC$ 再分为三个三角形. 根据 $n=3$ 的讨论，$\triangle BDC$ 是正三角形时，所分的三个三角形是一角为 120° 的等腰三角形；其他情况，所分的三个三角形都是直角三角形. 但前者，$\angle ADB$、$\angle ADC$ 的和为 300°，其中必有一个不小于 150°，后者 $\angle ADB$、$\angle ADC$ 的和大于 180°，其中必有一个为钝角. 因此，$\triangle ABC$ 所分成的五个三角形不可能全相似.

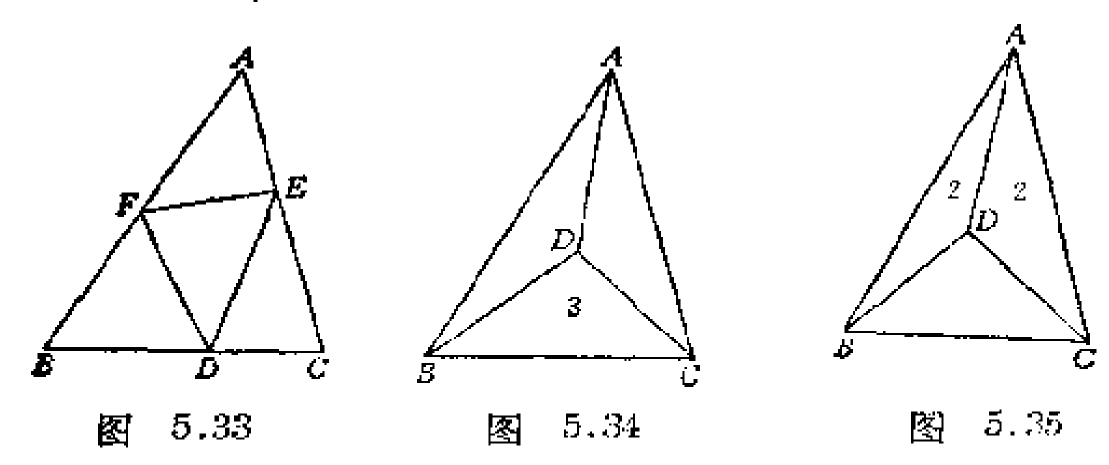


图 5.33　　图 5.34　　图 5.35

图 5.35 中，$\triangle ADB$、$\triangle ADC$ 均被再分为两个三角形. 所得的五个三角形均为直角三角形. 因此，$\angle ADB$，$\angle ADC$ 的和 $\geqslant 270°$，从而两个角都是钝角. 根据 $n=2$ 的讨论，$AD=DB$，$AD=DC$. 从而 $\triangle BDC$ 是等腰直角三角形. $\angle ABD$，$\angle DBC$，$\angle DCB$，$\angle ACD$ 都是 45°，这是不可能的.

$\triangle ABC$ 被 $AD$ 分为两个三角形，然后 $\triangle ABD$ 再分为两个三角形，$\triangle ADC$ 再分为三个三角形. 图 5.36 中，$\angle ADB$

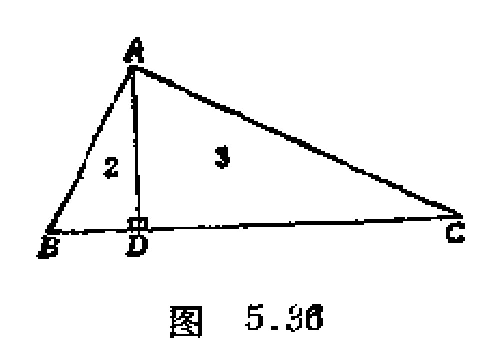


图 5.36

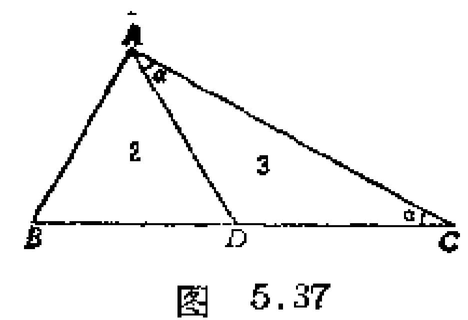


图 5.37

为直角，这时所分成的三角形与$\triangle ADB$、$\triangle ADC$相似，$\triangle ADB$与$\triangle ADC$相似，从而$\triangle ABC$是等腰或直角三角形.

图5.37中，$\angle ADC$为钝角．这时根据$n=3$的情况，$AD=DC$，$\triangle ADC$所分成的三个相似三角形都是有一角为$\alpha$的直角三角形．而$\angle ADB=2\alpha$，从而$\triangle ADB$被一条高分成的两个直角三角形有一个含$\angle ADB$时，$\alpha=30°$，$\angle BAC=90°$，或$\angle BAC=120°$，并且$AB=AC$；$\angle ADB$被一条高分成的两个直角三角形均不含$\angle ADB$（$\angle ADB$被一分为二）时，$\angle BAC=90°$.

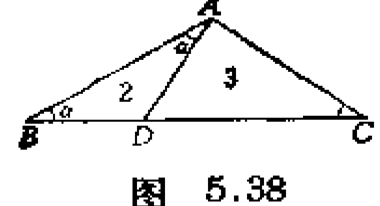


图 5.38

图5.38中，$\angle ADC$为锐角．这时$\triangle ADB$被高分为两个含锐角$\alpha$的直角三角形．根据$n=3$的情况，$\triangle ADC$所分成的三个直角三角形中至少有一个含$\angle ADC$或$\angle ACD$．前者，$\angle ADC=60°$($\alpha=30°$)，$\angle BAC=90°$或$\angle BAC=120°$，并且$AB=AC$．后者，$AB=AC$(若$\angle ACD=\alpha$)或$\angle BAC=90°$.

最后，$\triangle ABC$被$AD$分为两个三角形，然后$\triangle ADC$再分为四个三角形，所得五个三角形相似.

如果$\triangle ADC$按照图5.22或图5.23分为4个相似三角形，每一个均与$\triangle ADC$相似，从而$\triangle ABD$与$\triangle ADC$相似，

这时 $\triangle ABC$ 必为等腰或直角三角形. 因此在 $\triangle ABC$ 不是等腰或直角三角形时, $\triangle ADC$ 一定是特殊的三角形, 并且只能按照图 5.24 至 5.31 的分法分成四个相似三角形.

仅有图 5.24 中, 所分成的相似三角形不是直角三角形. 这时如图 5.39, $\angle ABD=30^\circ$, $\angle ACB=30^\circ$, $AB=AC$.

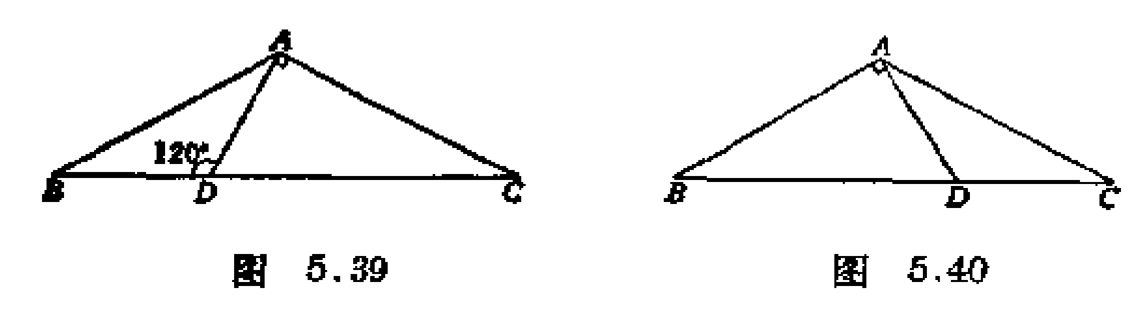



图 5.39　　　　图 5.40

其他情况, $\triangle ABD$ 均应为直角三角形. 若 $\angle BAD=90^\circ$, 则或根据图 5.29, 钝角 $\angle ADC=120^\circ$, 从而 $AB=AC$; 或根据图 5.27, $\triangle ADC$ 所分成的四个直角三角形有一个含 $\angle ACD$, 从而仍有 $AB=AC$.

若 $\angle ADB=90^\circ$, 则 $\triangle ADC$ 所分成的四个三角形均为直角三角形且均与 $\triangle ADC$ 相似, 从而 $\triangle ABC$ 是等腰或直角三角形.

综上所述, 当且仅当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形时, 可以分成 5 个相似的三角形.

**例 3**　证明:

(i) 存在一个凸六边形, 可以分成 6 个全等的三角形.

(ii) 对任意自然数 $n\geqslant4$, 都存在一个凸六边形, 可以分成 $n$ 个全等的三角形.

**证明**　(i) 显然正六边形可以分成 6 个全等的三角形, 这只要将六边形的中心与 6 个顶点连结起来即可.

(ii) 正六边形不能胜任现在的任务, 实际上(i)有点欺骗性, 有意将你的思路引入歧途.

问题可以换一个提法：能否用 $n$ 个全等的三角形（形状可以选择）拼成一个凸六边形？

想一想我们最熟悉的图形：除了三角形，莫过于平行四边形了．两个全等的三角形可以拼成一个平行四边形．四个全等的三角形也可以拼成平行四边形，它是前一个平行四边形的两倍，……．

然后，利用熟悉的方法：对称．如图 5.41，将 $\triangle ABC$ 关于边 $AB$ 作轴对称得到 $\triangle ABC'$．同样得到 $\triangle D'EF$．六边形 $C'AFD'EB$（只要 $\angle BAC < \angle ABC < 90°$，$\angle ACB < \angle ABC$，这六边形就是凸的）由偶数个全等的三角形组成．

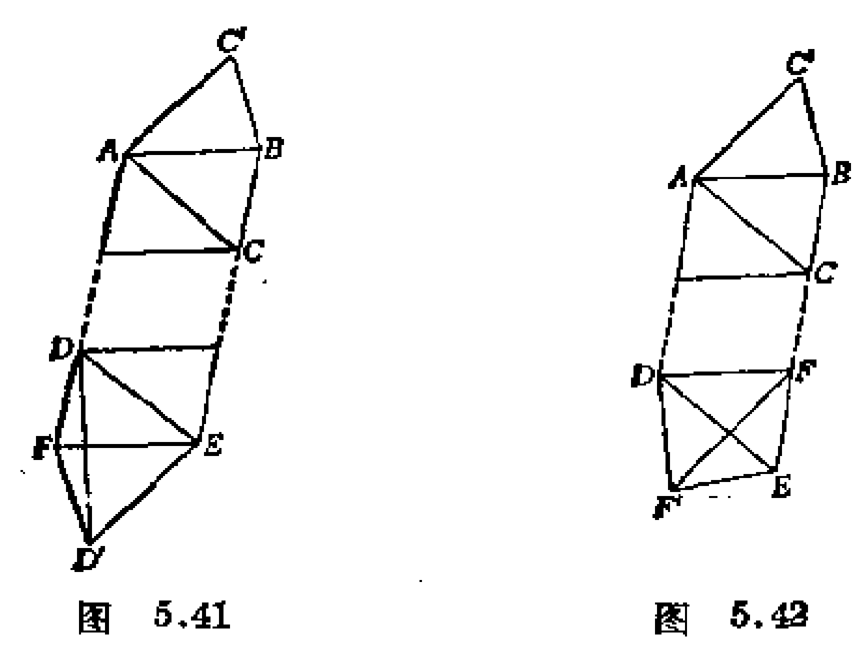



图　5.41　　　　图　5.42

在图 5.42 中，将 $\triangle DEF$ 关于边 $DE$ 作轴对称得到 $\triangle DEF'$，六边形 $C'ADF'EB$ 由奇数个（$\geqslant 5$ 个）全等三角形组成．

两个三角形当然不能拼成六边形．三个三角形只能拼成凸五边形（每拼上一个三角形周界至多增加一条边），不能拼成凸六边形．

容易知道，一个正方形可以分成 $n$ 个全等的正方形时，$n$

必须是完全平方数．三角形的情况要困难得多．

例4　如果任一个三角形都可以分成 $n$ 个全等的三角形，试确定 $n$ 所取的值．

解　用图5.13的办法，在 $n$ 是平方数时，每一个三角形都可以分成 $n$ 个全等的三角形．

由例2，只有等腰三角形可以分成两个全等的三角形，只有正三角形及一个锐角为 $30°$ 的直角三角形可以分成三个全等的三角形，只有一个锐角为 $30°$ 或 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ 的直角三角形可以分成五个全等的三角形(最后一种情况需要稍仔细的分析)．因此，$n\neq 2, 3, 5$．

下面证明 $n$ 必须是平方数．为此，需要一点代数知识(在后面的引理1中也需用到)．

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为实数，如果存在一组不全为0的有理数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，使得

$$n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_k\alpha_k=0, \tag{1}$$

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 称为在 $Q$(有理数域)上线性相关．

如果不存在不全为0的有理数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 使(1)成立，那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 称为在 $Q$ 上线性无关．

例如1与任一有理数 $r$ 在 $Q$ 上线性相关，因为取 $n_1=r$，$n_2=-1$，则 $n_1\cdot 1+n_2\cdot r=0$．而 $1, \sqrt{2}$ 在 $Q$ 上线性无关：如果有 $n_1$、$n_2\in Q$，使

$$n_1\cdot 1+n_2\sqrt{2}=0, \tag{2}$$

那么在 $n_2\neq 0$ 时，$\sqrt{2}=-\frac{n_1}{n_2}\in Q$，这是不可能的．所以 $n_2=0$，由(2)得 $n_1=0$．即 $n_1$、$n_2$ 均为0．

同理，1、$\sqrt{3}$ 在 $Q$ 上线性无关．进一步，1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$

在 $Q$ 上线性无关：如果有 $n_1$、$n_2$、$n_3\in Q$，使

$$n_1\cdot 1+n_2\cdot\sqrt{2}+n_3\cdot\sqrt{3}=0, \tag{3}$$

那么在 $n_3=0$ 时，由(3)及 1、$\sqrt{2}$ 在 $Q$ 上线性无关得 $n_1$、$n_2$ 均为 0. 同样，在 $n_2=0$ 时，$n_1$、$n_3$ 均为 0. 若 $n_2$、$n_3$ 均不为 0，那么

$$n_1^2=(n_2\sqrt{2}+n_3\sqrt{3})^2=2n_2^2+3n_3^2+2n_2n_3\sqrt{6},$$

$$\sqrt{6}=\frac{n_1^2-2n_2^2-3n_3^2}{2n_2n_3}\in Q,$$

这是不可能的.

**注** 上面所说的有理数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 可以改成整数，因为(1)式两边同乘 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 的分母的最小公倍数，就可以得到一个以整数为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 的系数的等式.

如果 $A$、$\alpha$、$\beta$ 都是实数，并且有 $a_1$、$a_2\in Q$，使

$$A=a_1\alpha+a_2\beta, \tag{4}$$

那么称 $A$ 可以为 $\alpha$、$\beta$(在 $Q$ 上的)线性组合.

如果 $A$、$B$ 都是 $\alpha$、$\beta$ 的线性组合，即有(4)及

$$B=b_1\alpha+b_2\beta, \tag{5}$$

$b_1$、$b_2\in Q$，那么在 $A$、$B$(在 $Q$ 上)线性无关时，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

这里的行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 即 $a_1b_2-a_2b_1$. 事实上，在

$$a_1b_2-a_2b_1=0$$

时，由(4)、(5)得

$$b_2A-a_2B=0,$$

与 $A$、$B$ 线性无关矛盾. 所以 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

如果 $A$、$B$、$C$ 线性无关，那么 $A$、$B$ 必定线性无关. 否则，

由 $n_1A+n_2B=0$，$n_1$、$n_2$ 为不全为 0 的有理数，导出 $n_1A+n_2B+0\cdot C=0$，即 $A$、$B$、$C$ 线性相关．因此，在 $A$、$B$、$C$ 线性无关时，如果有(4)、(5)成立，那么(6)成立．

于是，$A$、$B$、$C$ 线性无关时，它们不可能都是 $\alpha$、$\beta$ 的线性组合：因为(4)、(5)及

$$C=c_1\alpha+c_2\beta(=c_1\alpha+c_2\beta+1\cdot 0) \tag{6}$$

将导出

$$0=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & A \\ b_1 & b_2 & B \\ c_1 & c_2 & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}=n_1A+n_2B+n_3C, \tag{7}$$

$n_1$、$n_2$、$n_3\in \mathbf{Q}$，即 $A$、$B$、$C$ 线性相关，矛盾(不熟悉行列式的读者可直接从(4)、(5)、(6)中消去 $\alpha$、$\beta$，得出(7))．

现在回到原来的几何问题．我们作一个 $\triangle ABC$，它的角(用弧度表示)在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关．设 $\triangle ABC$ 被分成若干个彼此相似的三角形，这些三角形的内角为 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$．

设 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 被分成 $a_1$ 个 $\alpha$、$a_2$ 个 $\beta$、$a_3$ 个 $\gamma$，即

$$A=a_1\alpha+a_2\beta+a_3\gamma, \tag{8}$$

同样，设

$$B=b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma, \tag{9}$$

$$C=c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma, \tag{10}$$

其中 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 的系数都是非负整数．

三式相加得

$$\begin{aligned} &A+B+C \\ &=(a_1+b_1+c_1)\alpha+(a_2+b_2+c_2)\beta+(a_3+b_3+c_3)\gamma \end{aligned} \tag{11}$$

如果 $a_3+b_3+c_3=0$，那么由于 $a_3$、$b_3$、$c_3$ 都是非负整数，所以 $a_3=b_3=c_3=0$．但这样(8)、(9)、(10)就变成(4)、(5)、(6)，这是不可能的．因此 $a_3+b_3+c_3\neq 0$，从而

$$a_3+b_3+c_3\geqslant 1.$$

同理 $a_1+b_1+c_1\geqslant 1$，$a_2+b_2+c_2\geqslant 1$．而由(11)得

$$\pi=A+B+C\geqslant\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

从而必有

$$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=a_3+b_3+c_3=1.$$

不妨设 $a_1=1$，$b_1=c_1=0$(否则适当改变记号 $A$、$B$、$C$ 或 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 的顺序)．若 $a_2=1$，则 $b_2=c_2=0$，从而(9)、(10)变为 $B=b_3\gamma$，$C=c_3\gamma$，导致 $B$、$C$ 相关，这不可能．因此 $a_2=0$．不妨设 $b_2=1$，$c_2=0$．这时由(10)知 $C=c_3\gamma$，所以 $c_3\neq 0$，从而 $c_3=1$，$a_3=b_3=0$．(8)、(9)、(10)成为 $A=\alpha$，$B=\beta$，$C=\gamma$．我们得到一个有趣的结论：

如果 $\triangle ABC$ 的三个内角在 $\boldsymbol{Q}$ 上线性无关，那么将它分成彼此相似的三角形时，这些三角形与 $\triangle ABC$ 相似，而且 $\triangle ABC$ 的每个角都未被分开．

令 $$A=\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{m}\right),\ B=\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{m}\right),$$

$$C=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{m}\right),$$

其中 $m$ 为正整数，大于10．易知 $A$、$B$、$C$ 线性无关．如果 $\triangle ABC$ 分为 $n$ 个全等的三角形，那么这些三角形与 $\triangle ABC$ 相似，边长是 $\triangle ABC$ 的相应边长的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$．设边 $AB$ 上有 $j$ 条小三角形的边，则由正弦定理，

$$\frac{\sin C}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sin C}\leqslant j\leqslant\frac{\sin C}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sin A},$$

即

$$\sqrt{n}\leqslant j\leqslant\sqrt{n}\times\frac{\sin\left(1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{m}\right)\frac{\pi}{3}}{\sin\left(1-\frac{\sqrt{3}}{m}\right)\frac{\pi}{3}}. \qquad (12)$$

如果每个三角形都能分为 $n$ 个全等三角形，那么令 $m\to+\infty$，由(12)得

$$\lim_{m\to+\infty} j=\sqrt{n}.$$

但 $j(=j_m)$ 是整数，它的极限(如果存在)只能是整数(而且从某一项起，$j$ 是常数)，所以 $\sqrt{n}$ 是整数，$n$ 是平方数．

虽然例 4 告诉我们仅在 $n$ 是平方数时，每一个三角形都可以分为 $n$ 个全等三角形．但并不清楚对哪些 $n$，至少有一个三角形可以分成 $n$ 个全等三角形．上面已经知道对 $n=2$, 3, 4, 5, 都有三角形可以分成 $n$ 个全等三角形．又易知正三角形可以分成 6 个全等的直角三角形．因此，第一个存疑的 $n$ 是 7．我们有如下的

**猜测** 每个三角形都不能分成 7 个全等的三角形．

显然，如果有一个三角形能分成 $a$ 个全等的三角形，并且任一个三角形都能分成 $b$ 个全等的三角形，那么有一个三角形可以分成 $ab$ 个全等三角形．因此有三角形可以分成 $2n^2$、$3n^2$、$5n^2$、$6n^2$ 个全等三角形．

**例 5** 设 $k$、$h$ 都是正整数，证明有三角形可以分成 $k^2+h^2$ 个全等三角形．

**证明** 作一个直角三角形 $ABC$，两条直角边的比是 $k$:

$h$. 这个三角形斜边上高 $CD$ 将 $\triangle ABC$ 分成两个相似的直角三角形，面积之比为 $k^2:h^2$.

将 $\triangle ACD$、$\triangle DCB$ 分别分成 $k^2$、$h^2$ 个全等三角形. 这时 $\triangle ABC$ 被分成 $k^2+h^2$ 个全等三角形.

例如，$1997=29^2+34^2$，所以有三角形能分成 1997 个全等的三角形.

一个吸引了很多人的问题是完美正方形，即能否将一个正方形分成若干个互不相等的正方形？

稍容易的问题是"有无长方形能分成若干个互不相等的正方形？"这种"完美长方形"的第一个例子 1925 年由 Moron 给出，即图 5.43，它由 10 个正方形组成. Moron 还给出了由 9 个正方形组成的完美长方形，即图 5.44. 已经证明 9 是最小的，即每个完美长方形至少由 9 个不等的正方形组成. 完美长方形与图论有关，请参看拙著《趣味的图论问题》(上海教育出版社 1980 年出版)习题八第 11～13 题

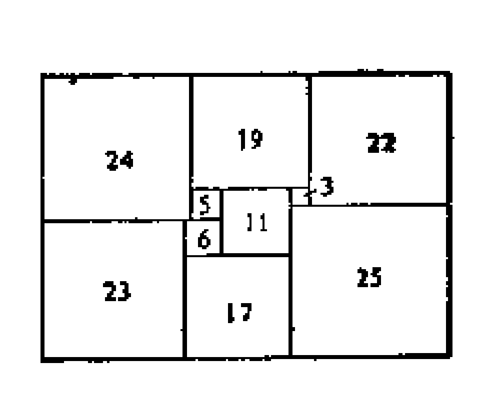



图 5.43

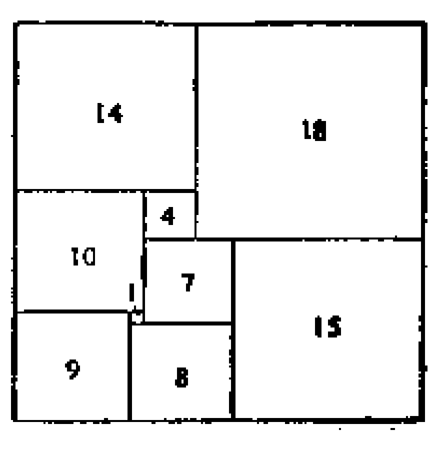
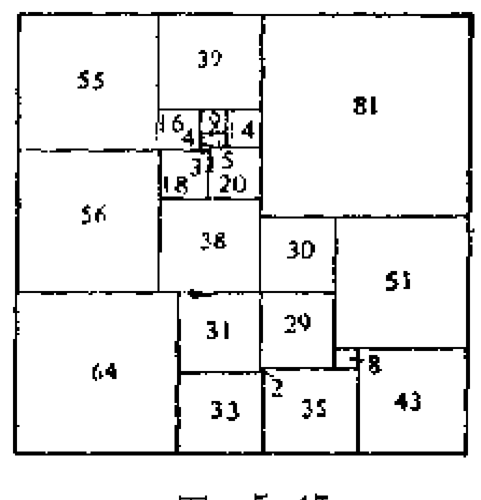
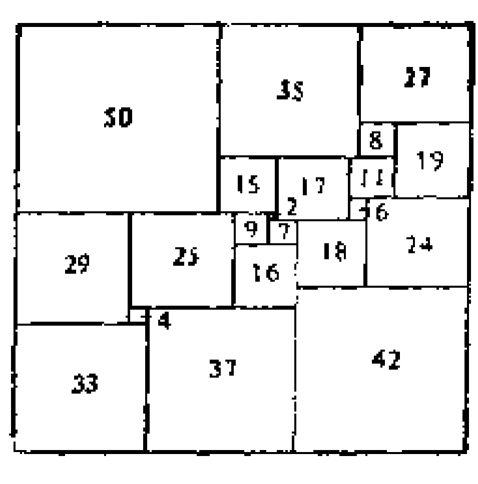



图 5.44

长期以来，人们以为完美正方形并不存在. 1939 年，Sprague 造出了 55 阶的完美正方形. 55 阶，即它由 55 个不等的正方形组成. 1951 年，Willcocks 造出 24 阶的完美正方形，如图 5.45. 一度认为 24 就是最小的阶，但随着计算机的





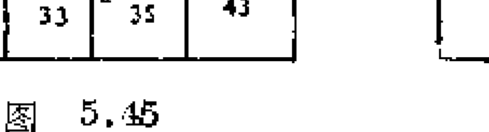


图 5.45　　图 5.46

进步，搜索手段不断加强，1978 年 Duijvestijn 终于发现了唯一的阶最小的完美正方形，即图 5.46，它的阶是 21.

如果将一个图形分解成几块，然后重新拼起来可以得到另一个图形，那么这两个图形就称为组成相等.

我国传统的游戏"七巧板"就是用七块板组成形形色色的图形．这在很多书籍中都有介绍，这里不再重复.

类似地，日本有一种游戏"吉四六之谜"，用图 5.47 中的四块板拼成种种图形，如图 5.48．其中第一个图最容易．第二至四图也不难，属于幼儿园水平．后面的图难度逐渐增加，可能需要较多时间尝试，但也可能碰得巧，一下子就拼出一个或几个.

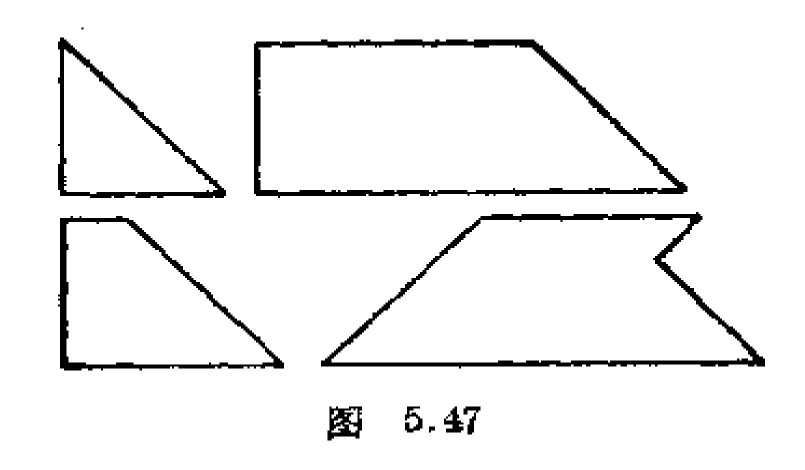


图 5.47

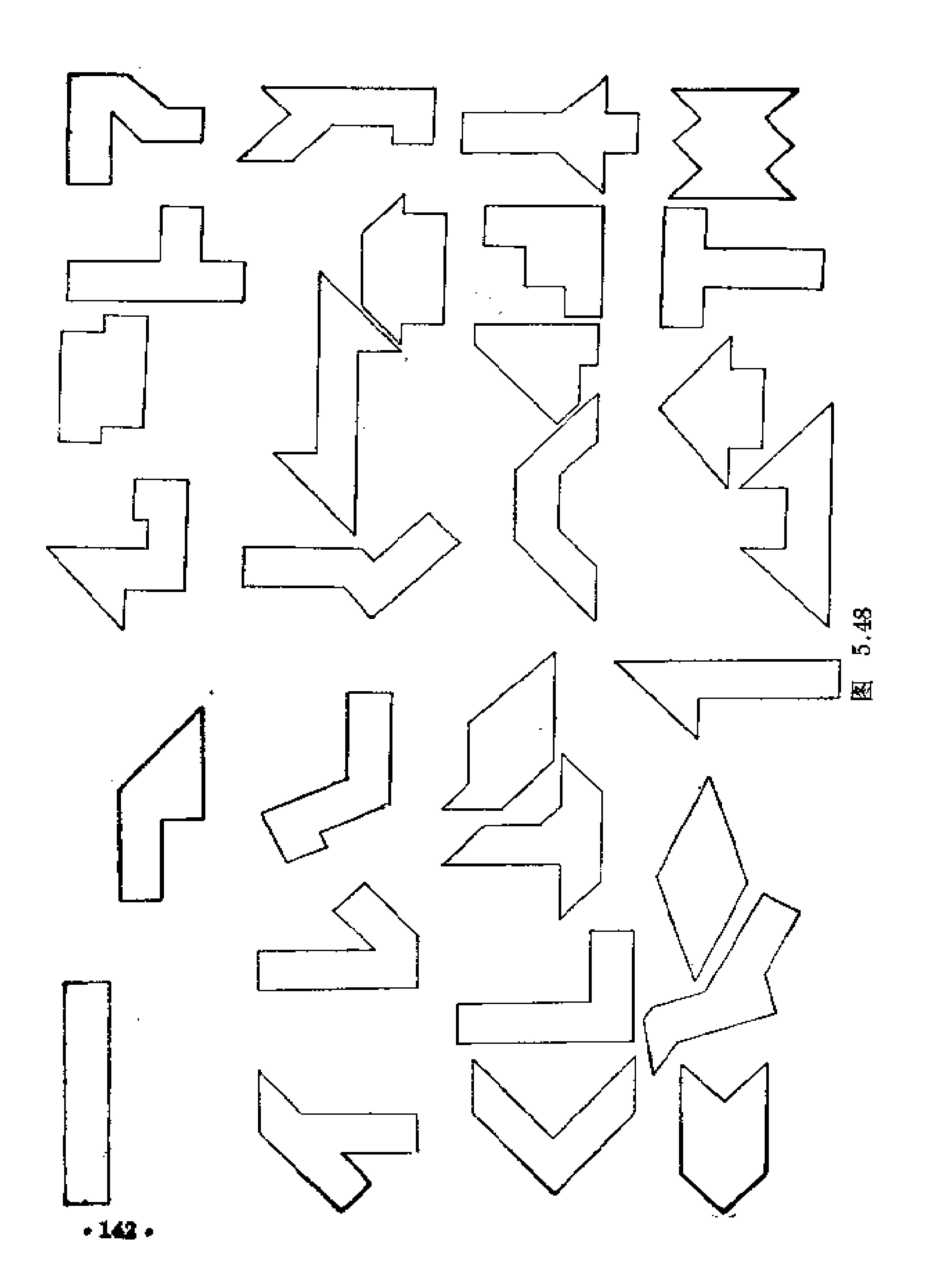


图 5.48

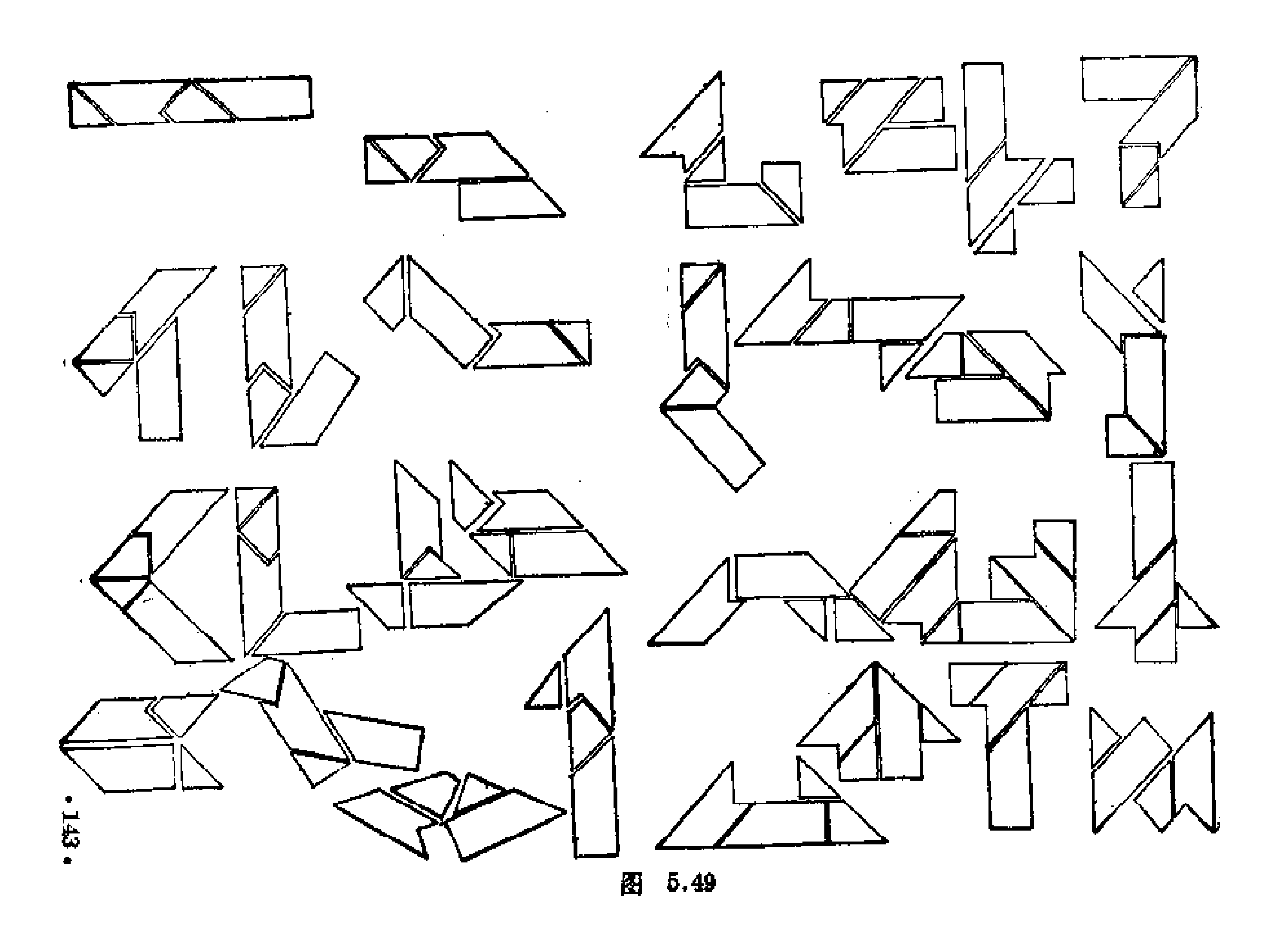


图 5.49

图 5.49 给出全部答案. 解答的窍门之一是注意图 5.47 中的第四块板，特别是第四块板的那个直角.

显然组成相等的图形必须面积相等. 反过来，面积相等的图形是否一定组成相等呢？

我们先看几个例子.

图 5.50 表明每个三角形与一个长方形组成相等.

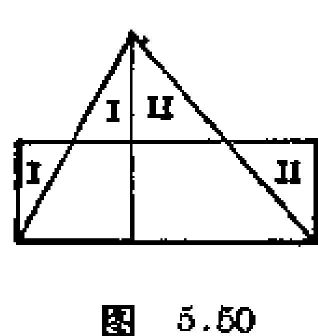



图 5.50

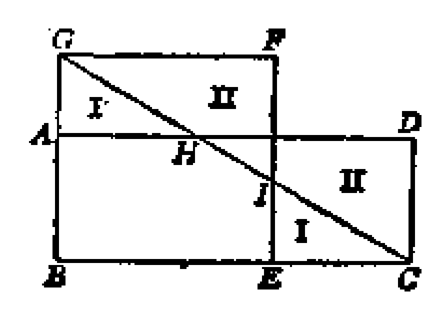



图 5.51

如果一个长方形与一个正方形面积相等，那么它们一定组成相等. 事实上，在图 5.51 中，矩形 $ABCD$ 的边长 $AB=a$，$BC=b$，正方形 $GBEF$ 的边长 $GB=\sqrt{ab}$. 易知$\triangle GAH\cong\triangle IEC$，从而 $\triangle GFI\cong\triangle HDC$. 将矩形 $ABCD$ 的 I、II 两部分(两个三角形)平移就可拼出正方形 $GBEF$.

每两个面积相等的矩形组成相等. 这是因为它们与同一个正方形组成相等. 将这个正方形分成若干份可以拼成第一个矩形；将这个正方形用另一种分法分成若干份又可以拼成第二个矩形. 所以，将两种分法都用于这个正方形，将它分成更多的小块，这些小块既可以拼成第一个矩形，也可以拼成第二个矩形. 从而这两个矩形组成相等(同样理由可知：如果两个图形都与第三个图形组成相等，那么它们也组成相等).

现在，我们可以证明 Wallace-Bolyai-Gerwien 定理，即

**例 6** 面积相等的多边形一定组成相等.

证明　多边形(不论凹凸)都可以分成若干个三角形. 每个三角形与一个矩形组成相等, 可以假定这个矩形有一边的长为1(因为所有面积相等的矩形组成相等). 这些矩形可以拼成一个一边为1的大矩形, 因此, 每个多边形都与这个边长为1的大矩形组成相等. 从而这两个多边形组成相等.

由例6可知:

(i) 面积相等的平行四边形组成相等.

这也可以直接证明. 图5.52表明每一平行四边形与一矩形组成相等, 而面积相等的矩形组成相等.

(ii) 面积分别为$a^2$、$b^2$的两个正方形组成的图形与一个面积为$a^2+b^2$的正方形组成相等.

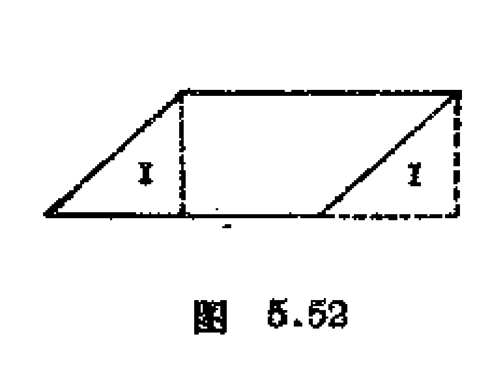



图 5.52

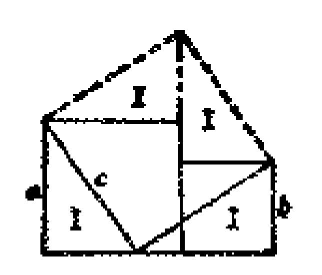



图 5.53

这也可以直接证明. 图5.53表明边长分别为$a$、$b$的两个正方形如何分解然后拼成一个边长为$c(=\sqrt{a^2+b^2})$的正方形. 这个图也提供了勾股定理的一种证明方法.

虽然我们知道面积相等的多边形一定组成相等, 但在每一种情况下, 需要将一个多边形分成的最少块数却是很难确定的. 例如用一个钝角三角形的锅烙饼(饼与锅一样大), 为了烙另一面, 必须将饼翻身. 这时需要将饼切开才能将饼正好(翻过一面)放在锅里. 问至少需切几刀? 也就是钝角三角形与它的轴对称图形组成相等, 至少需分成几块才能拼成后者?

图5.54表明切两刀就足够了(不需要三刀!). 如果原三

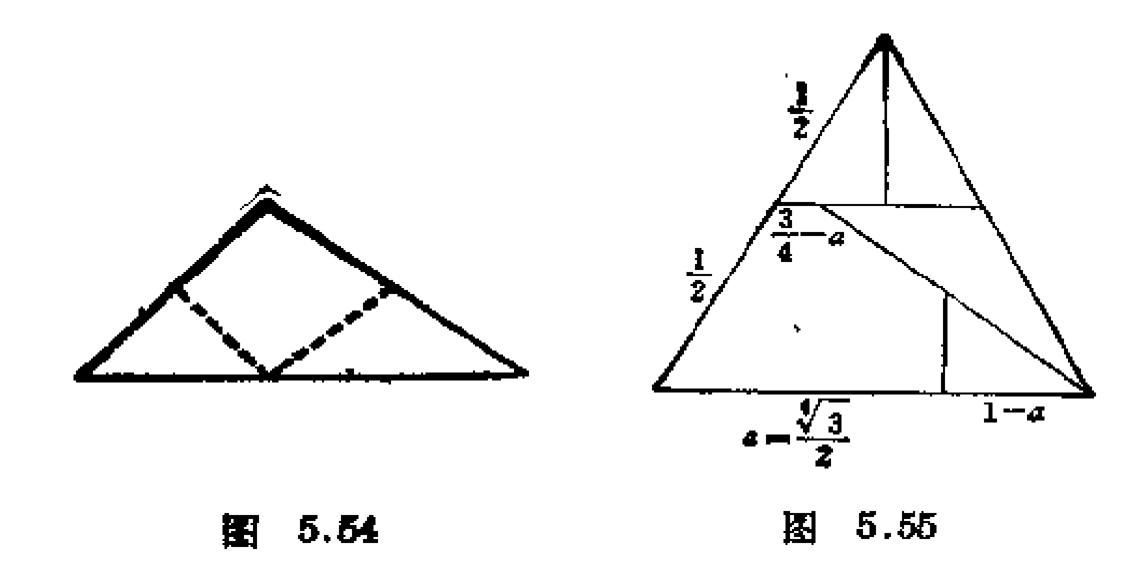



图 5.54　　　　图 5.55

角形的一个锐角是另一个的两倍或者钝角是一个锐角的三倍，那么只需切一刀(三角形被分成两个等腰三角形)．当然，如果原来的饼是等腰的，那么无需切开就能够翻身．

又如边长为 1 的正三角形至少需分成几块才能组成一个正方形？或者，一个正方形需分成几块才能组成正三角形？

图 5.55 表明将正三角形分成五块就可以拼成一个$\left(\text{边长为 } a=\frac{\sqrt[4]{3}}{2} \text{ 的}\right)$正方形．反过来，正方形分成五块就可以拼成一个正三角形．请自己剪五块板拼一下．似乎用正方形的五块板拼正三角形要难一些．

但是，5 并非最少，可以将正三角形分成四块，然后拼成正方形．史坦因豪斯的名著«数学万花镜»(裘光明译，上海教育出版社 1981 年出版)上载有具体的分法．

**例 7**　如果图形 $A$ 与一些图形拼在一起得到图形 $C$，图形 $B$ 与这些图形拼在一起也得到图形 $C$，那么我们称 $A$ 与 $B$ 拼补相等．证明两个多边形 $A$、$B$ 拼补相等的充分必要条件是 $A$、$B$ 的面积相等．

**证明**　只需证充分性．设 $A$、$B$ 面积相等，作一个充分大

的正方形 $C$, $C$ 可以覆盖 $A$, 也可以覆盖 $B$. 在 $C$ 中去掉 $A$, 剩下的部分是一个多边形 $A'$. 在 $C$ 中去掉 $B$, 剩下的部分是一个多边形 $B'$. 显然 $A'$ 与 $B'$ 的面积相等. 由例6, $A'$ 与 $B'$ 组成相等, 即 $A'$ 可以分成若干块, 这些块不但能拼成 $A'$, 也能拼成 $B'$. 于是, $A$ 与这些块可以组成 $C$, $B$ 与这些块也可以组成 $C$, 即 $A$ 与 $B$ 拼补相等.

在组成相等的问题中, 最著名的是"化圆为方".

二千多年前, 古希腊人就在研究尺规作图的三大问题, 即三等分任意角, 立方倍积, 化圆为方. 前两个问题利用代数中域扩张的知识(特别是伽罗华的群论)就可以解决, 即得出用尺规作图不可能三等分任意角, 不可能将立方倍积. 1882 年, 德国数学家 F. Lindemann 证明了 $\pi$ 是超越数, 从而 $\sqrt{\pi}$ 不可能用尺规作图, 因此, 不可能用尺规将一个单位圆化为一个与它等积的边长为 $\sqrt{\pi}$ 的正方形. 这就解决了化圆为方的经典问题.

现代的化圆为方是波兰数学家 A. Tarski 在 1925 年提出的:

平面上的圆盘(圆周及其内部)能否与一个正方形组成相等?

这里组成相等的意思是: 如果集 $A$ 能分成有限多个互不相交的集 $A_i$, 这些 $A_i$ 各经过一个运动后组成集 $B$, 那么就称 $A$ 与 $B$ 组成相等.

请注意这个新的定义与上面所说的组成相等有所不同. 首先, 这里的 $A_i$ 是任意点集. 不像上面是一个"块", $A_i$ 可以是不连通的, 甚至是不可测的(没有"面积"). 其次 $A_i$ 是互不相交的, 而上面所分成的块往往有公共的边界或顶点. 但这一点不太重要, 我们可以采取措施使这些块没有公共部分(参

见下面的注). 因此，原来的组成相等也是新意义下的组成相等，但反之不然.

Tarski 在 1925 年就知道比单位圆面积小的正方形及比单位圆面积大的正方形都不可能与单位圆组成相等(由于新定义中 $A_i$ 可以是任意集，这一点并非显然). 但面积与单位圆相等的正方形是否与单位圆组成相等呢?

这一现代的"化圆为方"问题延续了 65 年，直至 1990 年才被匈牙利数学家 M.Laczkovich 解决. 他证明了面积相等的圆与正方形组成相等，而且单位圆所分成的集 $A_i$ 只需经过平移就可以组成正方形. 他的方法也适用于例 6，面积相等的多边形组成相等，而且所说的运动可以限制为平移.

**注** 一个圆盘 $A$ 可以与 $A\cup B$ 组成相等，其中 $B$ 是一条线段，长度小于 $A$ 的半径. 事实上，作 $A$ 的一条半径 $OD$，并在 $OD$ 上取一条线段 $EF$ 与线段 $B$ 相等，并且 $E$、$F$ 都不是 $O$ 或 $D$. 将 $EF$ 绕 $O$ 旋转 1、2、3、…个弧度，这些线段组成一个无穷集 $M$，显然 $M\cup B$ 与 $M$ 组成相等(这就是无穷集的奇妙之处). 因此

$$A=M\cup(A-M),\ A\cup B=(M\cup B)\cup(A-M)$$

组成相等.

更进一步，圆盘 $A$ 与 $A\cup B$ 组成相等，其中 $B$ 是一条线段. 这只需将 $B$ 分为若干条长小于半径的线段，然后一条接一条地"吸收"到 $A$ 中去.

于是，任一有边界的多边形与它去掉一部分或全部边界所得的多边形组成相等，因为可在多边形内画一个小圆，将边界一段接一段地"吸收"到小圆中去.

空间的组成相等与平面的情况相差很大.

1900 年，Hilbert 在他的著名的 23 个问题中，提出能否

不用极限，仅用分解与拼补的方法建立三维空间多面体的体积理论．换句话说，“体积相等的多面体是否组成相等？”这就是 Hilbert 第三问题(其中组成相等是原来意义上的，即能否将一个多面体分成若干块多面体，然后拼成另一个多面体)．

这个问题是 23 个问题中最早解决的一个．在问题提出的当年，Hilbert 的学生 M.Dehn 证明了“体积相等的正四面体与正方体不组成相等”．

证明这一定理需要几个引理．

**引理 1** 正四面体的二面角 $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$ 与 $\pi$ 在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关($\varphi$ 用弧度制度量)．

**证明** 如果 $\varphi$ 与 $\pi$ 线性相关，那么有整数 $m$、$n$ 使得

$$m\varphi+n\pi=0, \tag{13}$$

并且 $m$、$n$ 不全为 0．从而 $m$、$n$ 均不为 0，并且由(13)得

$$\cos m\varphi=\pm1. \tag{14}$$

另一方面，$\cos\varphi=\frac{1}{3}$，$\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=\frac{-7}{9}$．假设对于 $k=1, 2, \cdots, h$ 均有 $\cos k\varphi=\frac{a_k}{3^k}$，其中 $a_k$ 为与 3 互质的整数，则

$$\begin{aligned}\cos(h+1)\varphi&=-\cos(h-1)\varphi+2\cos\varphi\cos h\varphi\\&=-\frac{a_{h-1}}{3^{h-1}}+\frac{2a_h}{3^{h+1}}=\frac{2a_h-9a_{h-1}}{3^{h+1}}=\frac{a_{h+1}}{3^{h+1}},\end{aligned}$$

其中 $a_{h+1}=2a_h-9a_{h-1}$ 与 3 互质．

因此，$\cos k\varphi$ 是分母为 $3^k$ 的既约分数，(14) 不可能成立．

正方体的二面角是 $\frac{\pi}{2}$．由引理 1，如果有整数 $n_1$、$n_2$、$n_3$ 使

$$n_1 \cdot \pi + n_2 \cdot \frac{\pi}{2} + n_3 \cdot \varphi = 0, \tag{15}$$

那么 $n_3 = 0$. 于是，设函数 $f$ 满足

$$f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f(\varphi) = 1, \tag{16}$$

则在(15)成立时，必有

$$n_1 f(\pi) + n_2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + n_3 f(\varphi) = 0. \tag{17}$$

一般地，设

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k \tag{18}$$

是一组实数，$f$ 是定义在(18)及 $\pi$ 上的函数，$f(\pi) = 0$，并且对任一组使

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_k\alpha_k = 0 \tag{19}$$

的整数 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$，

$$n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \cdots + n_k f(\alpha_k) = 0, \tag{20}$$

则称 $f$ 是(18)上的一个可加函数.

**引理2** 设 $f$ 是(18)上的一个可加函数，$\gamma$ 是一个实数，不在(18)中，那么可以定义 $f(\gamma)$ 使得 $f$ 是 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \gamma$ 上的可加函数.

**证明** 如果 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \gamma$ 之间不存在形如

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_k\alpha_k + n\gamma = 0 \tag{21}$$

的关系式，其中 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k,\ n$ 都是整数，并且 $n \neq 0$. 那么 $f(\gamma)$ 可以任意定义.

如果有一个形如(21)的关系式，那么定义

$$f(\gamma) = -\frac{1}{n}(n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \cdots + n_k f(\alpha_k)). \tag{22}$$

这时，对任一组使

$$n_1'\alpha_1 + n_2'\alpha_2 + \cdots + n_k'\alpha_k + n'\gamma = 0 \tag{23}$$

成立的整数 $n_1', n_2', \cdots, n_k', n'$,

$$
\begin{aligned}
& n_1' f(\alpha_1)+n_2' f(\alpha_2)+\cdots+n_k' f(\alpha_k)+n' f(\gamma) \\
& \quad = n_1' f(\alpha_1)+\cdots+n_k' f(\alpha_k) \\
& \qquad -\frac{n'}{n}(n_1 f(\alpha_1)+n_2 f(\alpha_2)+\cdots+n_k f(\alpha_k)) \\
& \quad =\frac{1}{n}((n n_1'-n' n_1) f(\alpha_1)+\cdots+(n n_k'-n' n_k) f(\alpha_k)).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

而由(21)、(23)消去 $\gamma$ 得

$$
(n n_1'-n' n_1) \alpha_1+(n n_2'-n' n_2) \alpha_2+\cdots+(n n_k'-n' n_k) \alpha_k=0. \tag{25}
$$

因为 $f$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 上的可加函数,(25)导出

$$
\begin{aligned}
& (n n_1'-n' n_1) f(\alpha_1)+(n n_2'-n' n_2) f(\alpha_2) \\
& \quad +\cdots+(n n_k'-n' n_k) f(\alpha_k)=0,
\end{aligned}
$$

结合(24)得

$$
n_1' f(\alpha_1)+n_2' f(\alpha_2)+\cdots+n_k' f(\alpha_k)+n' f(\gamma)=0,
$$

于是,$f$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \gamma$ 上的可加函数.

由引理 2,我们可以逐步将数添加到(18)中,使可加函数 $f$ 的定义域扩大.

**引理 3** 设 $A$ 是一个多面体,分成 $k$ 个多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$. $A$ 的二面角是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$; $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 的二面角是 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$(计及重数,即 $\alpha$ 出现几次,就重复写几次),并且都用弧度制度量. 如果有

$$
\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t \tag{26}
$$

上的可加函数 $f$,定义

$$
f(A)=\sum_{i=1}^{s} l_i f(\alpha_i), \tag{27}
$$

其中 $l_i$ 是二面角 $\alpha_i$ 的棱的长,类似地定义 $f(M_1), \cdots,$

$f(M_k)$，则

$$f(A)=f(M_1)+f(M_2)+\cdots+f(M_k). \tag{28}$$

**证明** 设 $l$ 是多面体 $A$, $M_1$, $\cdots$, $M_k$ 中某一个的棱，除端点外，$l$ 上可能还有这些多面体中某一个或某几个的顶点，这时 $l$ 被这些顶点分作几段(如果没有其他顶点，$l$ 自身算作一段)。

设 $l_1$ 被分成三段，长分别为 $m_1$, $m_2$, $m_3$，则

$$l_1 f(\alpha_1)=m_1 f(\alpha_1)+m_2 f(\alpha_2)+m_3 f(\alpha_3).$$

对(28)式两边的棱均可这样处理。于是棱化为段，只要证明每一段 $m$ 在(28)式两边的"贡献"相同(即关于 $m$ 合并同类项后，$m$ 在(28)式两边的系数相同)。

如果 $m$ 在 $A$ 的棱上，$A$ 这条棱所张二面角为 $\alpha$，其他多面体在 $m$ 所张二面角为 $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\cdots$, $\gamma_p$，则如图 5.56 或 5.57，

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_p=\alpha \text{ 或 } \alpha-\pi. \tag{29}$$

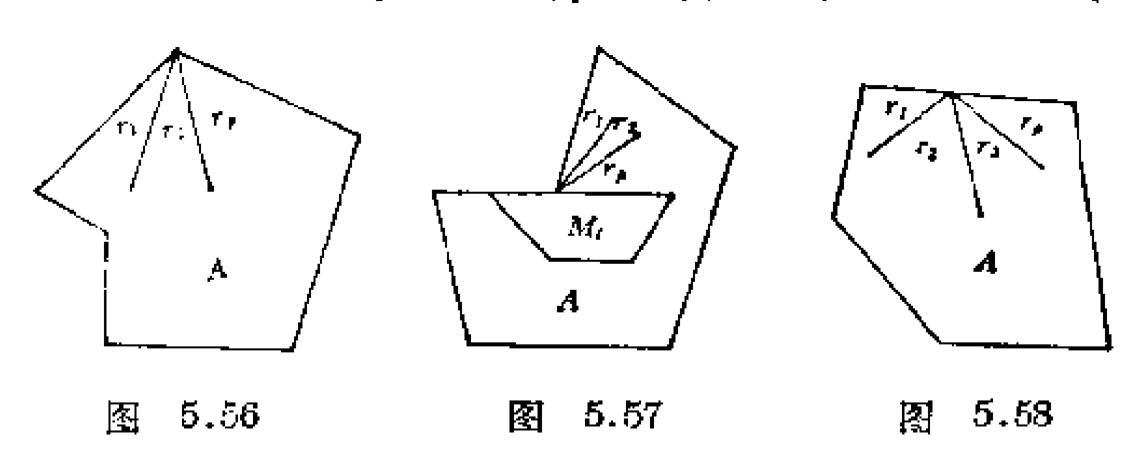



图 5.56　　图 5.57　　图 5.58

后一种情况仅在二面角 $\alpha$ 为优角($A$ 在这里凹)并且 $m$ 在一个多面体 $M_i$ 的面上时才会发生。

由 $f$ 的可加性及(29)得

$$f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+\cdots+f(\gamma_p)=f(\alpha),$$

即 $m$ 在(28)两边的贡献相同。

如果 $m$ 在 $A$ 的面上，则图 5.58 表明

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_p=\pi,$$

从而

$$f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+\cdots+f(\gamma_p)=0. \tag{30}$$

如果 $m$ 在 $A$ 的内部($m$ 的端点除外)，那么

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_p=2\pi \text{ 或 } \pi,$$

同样有(30)成立.

这两种情况，$m$ 对(28)两边的贡献都是 0.

因此(28)成立.

Dehn 定理原来的证明比较复杂. 我们的证明采用了瑞士数学家 Hadwiger 的思想. 有了上面的引理之后，现在先给出

**Hadwiger 定理** 设 $A$、$B$ 是两个体积相等的多面体，$A$ 的二面角是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$. $B$ 的二面角是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$. 如果有 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 上的可加函数 $f$ 使得 $f(A)\neq f(B)$($f(A)$、$f(B)$的意义同引理 3)，那么 $A$ 与 $B$ 不组成相等.

证明 如果 $A$、$B$ 组成相等，那么 $A$ 可分成一些多面体 $M_1, M_2, \cdots, M_k$，这些多面体也可组成 $B$.

设 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_h$ 为 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 的全部二面角. 根据引理 2，$f$ 可扩大为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_h$ 上的可加函数. 根据引理 3，

$$f(A)=\sum_{i=1}^{k} f(M_i)=f(B),$$

矛盾. 因此在 $f(A)\neq f(B)$ 时，$A$、$B$ 不组成相等.

利用 Hadwiger 定理及引理 1 不难证明 Dehn 定理.

采用引理 1 下面的函数 $f$. 由于 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f(\varphi)=1$, 对棱长为 $a$ 的正方体 $A$,

$$f(A)=12\times af\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

对棱长为 $b$ 的正四面体 $B$,

$$f(B)=6\times bf(\varphi)=6b\neq 0.$$

因此,正四面体 $B$ 与正方体 $A$ 不组成相等.

有趣的是在 Hilbert 提出第三问题的前四年, 即 1896 年, 法国的 R. Bricard 已经给出一个更容易判别多面体是否组成相等的条件:

如果多面体 $A$ 与 $B$ 组成相等,那么必有整数 $p$ 及正整数 $n_i(1\leqslant i\leqslant s)$, $n'_j(1\leqslant j\leqslant t)$, 使得

$$n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_s\alpha_s=n'_1\beta_1+n'_2\beta_2+\cdots+n'_t\beta_t+p\pi,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 $A$ 的二面角, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是 $B$ 的二面角.

由这个条件及引理 1 立即得到 Dehn 定理.

但是, Bricard 所给出的证明是错误的(或许这就是 Hilbert 当年不援引 Bricard 的文章的原因). 在这里要给出一个严格的证明又嫌太长, 我们只能割爱. 有兴趣的读者可阅读 Boltianski 的专著«Hilbert's Third Problem».

1965 年, Sydler 指出 Dehn 所给出的必要条件(即 Hadwiger 定理中的 $f(A)=f(B)$)也是充分的. 这就是下面的

**Dehn-Sylder 定理** 体积相等的两个多面体 $A$、$B$ 组成相等的充分必要条件是对每一个

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$$

上的可加函数 $f$,

$$f(A)=f(B),$$

其中 $\alpha_i$ 是 $A$ 的二面角, $\beta_j$ 是 $B$ 的二面角.

这一定理的证明见上面所列举的著作.

在三维(或更高维)空间中, 如果采用新意义下的组成相等(即将集 $A$ 分成有限多个集, 然后各经过一个运动组成集 $B$), 那么将产生意想不到甚至看起来荒谬的结果. 例如著名的 Banach-Tarski 悖论: 三维空间中任意两个立体组成相等.

这就是说一个小小的弹丸与庞大的太阳组成相等. 按照常识, 弹丸所分成的每一部分经过运动, 大小不变, 不可能组成太阳. 但这种常识似是而非. 首先弹丸所分成的集未必是可测集, 即不一定有"体积". 其次, 对于无限集, 一个集可以与它的真子集组成相等(化圆为方问题处的注已举过这种例子).

关于这一悖论涉及问题很多(例如集论中的选择公理). 有兴趣的读者请看 S. Wagon 的著作《The Banach-Tarski Paradox》.

但是, Banach 在 1923 年证明了上面的悖论在直线与平面中不会出现. 所以 Tarski 才提出他的"化圆为方"问题.

注 Banach 和 Tarski 还证明了"一个(实心)球可以分成五个集, 由它们能组成两个与原来同样大小的(实心)球". "在直线或平面上, 对任意两个被曲线围成的有内点的集 $A$、$B$, 都可以将 $A$ 分为可数个集(不是有限个!), 这些集可以组成 $B$. 但对直线与平面上的可测集 $A$、$B$, 仅在 $A$、$B$ 测度(面积或长度)相等时, $A$ 才可能分为有限个集, 这些集可以组成 $B$".

在本节的最后, 我们谈一谈镶嵌图案.

在房间的装修中, 常常用某一种(或几种)形状的瓷砖来铺地或贴墙. 这种形状(的砖)可以铺满(无重叠, 以下均如

此）整个平面，通常称之为镶嵌图案.

正方形显然是镶嵌图案，正三角形与正六边形也都是镶嵌图案，如图 5.59 与图 5.60.

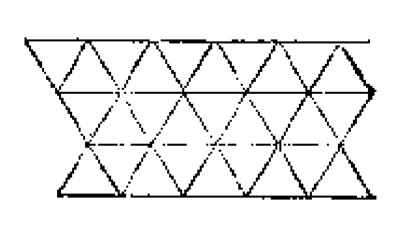


图 5.59

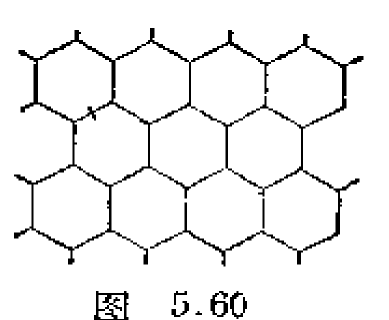


图 5.60

正五边形不是镶嵌图形，因为它的内角为 $\frac{3\pi}{5}$，而 $\frac{3\pi}{5}$ 的倍数不能构成周角 $2\pi\left(3\times\frac{3\pi}{5}<2\pi,\ 4\times\frac{3\pi}{5}>2\pi\right)$.

一般地，$n\geqslant7$ 时，正 $n$ 边形不是镶嵌图形. 事实上，正 $n$ 边形的内角为 $\frac{n-2}{n}\pi$，而

$$2\pi\div\frac{n-2}{n}\pi=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2},$$

仅在 $n=6,\ 4,\ 3$ 时才为整数. 所以仅在 $n=6,\ 4,\ 3$ 时，正 $n$ 边形是镶嵌图形.

任意的三角形都是镶嵌图形. 因为两个同样的三角形可以拼成一个平行四边形，而平行四边形和正方形一样都是镶嵌图形.

任意的四边形也都是镶嵌图形. 事实上，由一个四边形 $ABCD$ 开始，关于 $CD$ 中点作中心对称得到四边形 $A'B'DC$. 再关于 $A'B'$ 的中点作中心对称. 这样向右继续延伸下去. 同样，关于 $AB$ 中点对称，也可将图形向左延伸. 于

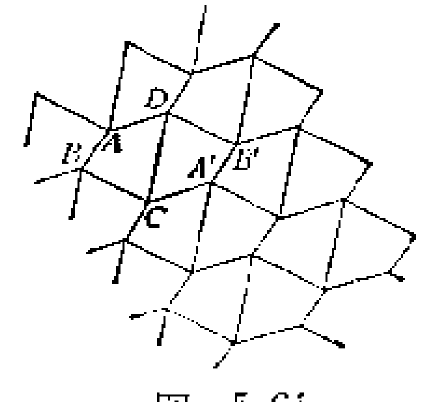



图 5.61

是，得到一个两边无限延伸的带形．将这带形的每个四边形关于它上面的边($AD$、$DB'$等等)的中点作对称，又可以得到一个带形．这样继续下去，就可以用同样的四边形铺满平面(图5.61).

能够作为镶嵌图形的六边形共有3种．能够作为镶嵌图形的五边形，已经发现14种，但不知道是否只有这14种．边数大于6的多边形不能作为镶嵌图形，这一结论曾被认为"不难证明"，但很久以来没有人见过一个完整的证明．直到1978年，I. Niven才弥补了这方面的缺陷．他指出对任意两个正实数$\alpha$、$\beta$，不可能用一批边数$\geqslant 7$，面积$\geqslant\alpha$，周长$\leqslant\beta$的凸多边形(不要求这些多边形全等)铺满平面．但如果不要求面积$\geqslant\alpha$或不要求周长$\leqslant\beta$，那么可以用一批凸多边形铺满平面，这批多边形边数相同，周长都$\leqslant\beta$或面积都$\geqslant\alpha$.

我们证明两个较弱的结论.

**例8** 若一个凸多边形可经平移铺满平面，则它的边数$n\leqslant 6$.

**证明** 取一个足够大的正方形，将它上下粘合起来，左右粘合起来成为一个环面，使得这环面仍被这种凸多边形铺满.

设环面上凸多边形形成的"地图"共有$v$个顶点，$e$条边，$f$个面，则由环面上的Euler定理，

$$e-v=f. \tag{31}$$

又每一点至少引出3条边，所以

$$3v\leqslant 2e=nf. \tag{32}$$

由(31)、(32)得

$$3f=3e-3v\geqslant 3e-2e=e=\frac{n}{2}f,$$

从而 $$n\leqslant 6.$$

**例 9** 用同样大小的凸 $n$ 边形铺满平面，并且每两个凸 $n$ 边形或者没有公共点，或者仅有一个公共顶点，或者有一条公共边(即不允许一个多边形的顶点在另一个的边的内部)，那么 $n\leqslant 6$.

**证明** 设这凸 $n$ 边形的周长为 1，面积为 $S$.

考虑顶点为($\pm r$, $\pm r$)的正方形 $S_r$，它的面积是 $4r^2$.

每一多边形的直径(点集中任两点距离的最大值)不超过周长的一半即 $\frac{1}{2}$，所以与 $S_r$ 有公共点的多边形完全落在 $S_{r+1}$ 中.

设与 $S_r$ 有公共点的多边形有 $n_1$ 个，与 $S_{r+1}$ 有公共点的多边形有 $n_2$ 个. 又设所述 $n_1$ 个多边形共有 $v$ 个顶点(每个顶点只算一次，不重复计算)，则有

$$4(r+2)^2>n_2S\geqslant 4(r+1)^2>n_1S\geqslant 4r^2, \tag{33}$$

$$n_1(n-2)\pi<2v\pi \quad (\text{考虑内角和}), \tag{34}$$

$$nn_2>3v \quad (\text{考虑边数}). \tag{35}$$

由(34)、(35)消去 $v$ 得

$$2nn_2>6v>3n_1(n-2).$$

结合(33)得

$$8n(r+2)^2>2nn_2S>3n_1(n-2)S\geqslant 12(n-2)r^2. \tag{36}$$

两边同除以 $r^2$ 得

$$8n\left(1+\frac{2}{r}\right)^2>12(n-2).$$

令 $r\to+\infty$，得

$$8n\geqslant 12(n-2),$$

从而 $$n\leqslant 6.$$

例 8 的证明利用环面，将“无限”化为“有限”（因为仅用平移铺满平面，呈现周期现象）．例 9 的证明则取一足够大的正方形近似平面，再令正方形扩张至无穷，用“有限”去逼近“无限”．两者有异曲同工之妙．

如果不要求图形全等，那么铺满平面的办法更多．

**例 10** 能否用两两不同的正方形铺满平面？

**解** 如图 5.62，首先作两个相邻的边长都是 $a$ 的正方形，在它们右边放一个边长为 $2a$ 的正方形，在这三个上方放一个边长为 $3a$ 的正方形，在左边放边长为 $5a$ 的正方形，下方放边长为 $8a$ 的正方形，……这样继续下去，螺旋式转动，逐步扩大铺砌的面积．所用的正方形的边长去掉因数 $a$ 后成 Fibonacci 数：

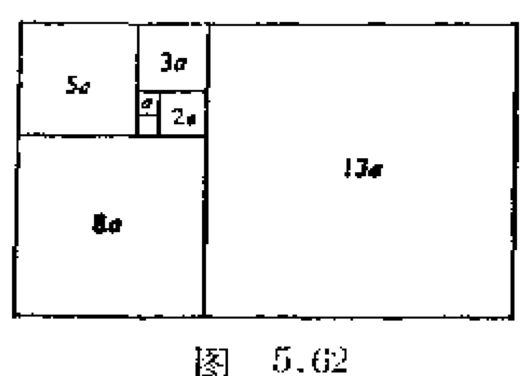


图 5.62

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

这些正方形中只有开始两个边长相等，但我们可以将第一个按照图 5.45 或 5.46 分成若干个互不相等的正方形（取 $a$ 为完美正方形的边长）．这样，我们就用全不相等的正方形铺满了平面．

**例 11** 能否用边长都是有理数并且互不全等的三角形铺满平面？

**解** 在坐标平面中，先取一个以 $(0,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0,\ 4)$ 为顶角的直角三角形．它的边长为 3、4、5．用这种直角三角形显然能铺满平面．然后将每个直角三角形分成两个有理三角形（即边长为有理数的三角形）．分法如下：

对每个整数 $n>5$，令

$$x_n=\frac{16n(n^2+1)}{(n^2-1)^2}.$$

易知 $0<x_n<3$. 取点$(x_n, 0)$并将它与$(0, 4)$相连. 开始所作的直角三角形被分为两个三角形. 边长为有理数4, 5, $x_n$, $3-x_n$及

$$\sqrt{x_n^2+16}=\frac{4(n^4+6n^2+1)}{(n^2-1)^2}.$$

将每个直角三角形作类似的剖分, 但 $n$ 各不相同, 这样, 整个平面就被分成互不相同的有理三角形.

**例 12** 能否用一批多边形铺满平面, 这些多边形不一定凸, 但每一个都可以旋转 $\frac{360°}{5}$ 仍然与自身重合?

**解** 如图 5.63, 先作一个正五边形, 再作一个二十边形. 先作的正五边形及四个同样的正五边形与这二十边形合成一个较大的正五边形. 继续这样的过程, 不断产生更大的正五边形, 直至覆盖平面.

所作的正五边形及凹的二十边形都可以绕自己的中心旋转 $\frac{360°}{5}$ 仍与自身重合.

**注** 这里 $\frac{360°}{5}$ 也可以改为 $\frac{360°}{7}$ 或一般的 $\frac{360°}{n}$ $(n\geqslant 3)$.

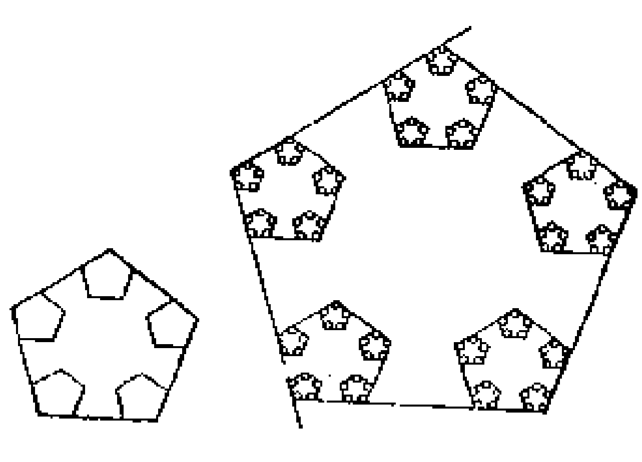


图 5.63

# §6 距　离

"他还喜欢另一些词，例如距离……"

——罗伯特·沃勒《廊桥遗梦》

平面上 $n$ 个点组成一个有限点集．每对点之间的距离，可能有相等的，也有不等的，距离中有最大的，有出现次数最多的，……，这些就是本节讨论的内容．

**例 1**　设 $n$ 个点间两两距离的最大值为 1，证明其中距离为 1 的点对至多 $n$ 个．

**证明**　$n=1, 2, 3$ 时结论显然．假设 $n>3$ 并且结论对 $n-1$ 个点成立．考虑 $n$ 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，其中最大距离为 1．

若每一点至多与两个点的距离为 1，则距离为 1 的点对至多 $\frac{n\times 2}{2}=n$ 个．设点 $P_1$ 与 $P_i$、$P_j$、$P_k$ 的距离都是 1．因为 $P_iP_k\leqslant 1=P_1P_i=P_1P_k$，所以 $\angle P_iP_1P_k\leqslant 60°$．同理 $\angle P_iP_1P_j$，$\angle P_jP_1P_k\leqslant 60°$，不妨设 $P_1P_j$ 在 $\angle P_iP_1P_k$ 内(图 6.1)．

图　6.1

显然点集中的点都在以 $P_1$ 为心，1 为半径的圆内，若点 $P_m$ 不在扇形 $P_kP_1P_i$ 内，连结线段 $P_jP_m$，这条线段必与线段

$P_1P_i$ 或 $P_1P_k$ 相交. 设 $P_jP_m$ 与 $P_1P_i$ 相交, 则

$$\angle P_kP_jP_m > \angle P_kP_jP_1 = \angle P_jP_kP_1 > \angle P_jP_kP_m,$$

所以 $$P_jP_m < P_mP_k \leqslant 1.$$

若点 $P_m$ 在扇形 $P_kP_1P_i$ 内, 不同于 $P_j$, 则

$$P_jP_m < \max(P_1P_j,\ P_jP_i,\ P_jP_k) = 1,$$

因此 $P_j$ 仅与 $P_1$ 的距离为 1.

在 $n$ 个点中去掉 $P_j$, 根据归纳假设, 其中距离为 1 的点对至多 $n-1$ 个. 所以添进 $P_j$ 后, $n$ 个点之间距离为 1 的点对至多 $n$ 个.

若 $n-1$ 个点都在图 6.1 的弧上, 则 $P_1P_j(2 \leqslant j \leqslant n)$ 及 $P_iP_k$ 都是 $n$. 因此例 1 结果为最佳.

在三维空间, 距离达到最大的点对可以有 $2n-2$ 个. $2n-2$ 也是最佳值.

**例 2** 设 $n$ 个点之间的最小距离为 1, 证明至多有 $3n$ 个点对的距离为 1.

**证明** 以 $P_1$ 为圆心作半径为 1 的圆, 在这个圆上至多有 6 个点属于所给点集(否则必有两点之间的弧 < 圆周的 $\frac{1}{6}$, 从而这两点间的距离 <1). 因此, 点 $P_1$ 至多与 6 个点的距离为 1. 其他各点同样如此, 所以点集中距离为 1 的点对至多 $\frac{n\times 6}{2} = 3n$ 个.

Harborth 在 1974 年证明了 $n$ 个点中最小距离的个数不超过 $[3n-\sqrt{12n-3}]$, 这一结果为最佳. 我们不证明这一结论, 但例 2 的结果在 $n \geqslant 3$ 时可以稍稍改进为 $3n-6$:

当 $n=3$ 时结果显然. 设结论对 $n$ 成立, 考虑 $n+1$ 个点. 设这些点所成凸包的一个顶点为 $P_{n+1}$, 则凸包在 $P_{n+1}$ 处的内角 <180°. 这样点 $P_{n+1}$ 至多与三个点的距离为 1(否则有四

个点在以 $P_{n+1}$ 为圆心，1 为半径，圆心角 $<180°$ 的弧上，因此四个点中必有两点所夹的弧 $<\frac{180°}{3}=60°$，这两点之间的距离小于最小距离 1)．

去掉 $P_{n+1}$，由归纳假设至多 $3n-6$ 个距离为 1．添入 $P_{n+1}$，至多 $3n-6+3=3(n+1)-6$ 个点对的距离为 1．

**例 3** 设 $n$ 个点中某一距离，例如距离 1 出现的次数为 $g$，证明

$$g<\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}}. \tag{1}$$

**证明** 对每个点 $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$，以 1 为半径作圆．设圆上有 $k_i$ 个点，则

$$\sum_{i=1}^{n}k_i=2g. \tag{2}$$

考虑以已知点为两个端点的线段．这样的线段共有 $C_n^2$ 条，其中成为所作的圆的半径或弦的至少

$$\sum_{i=1}^{n}k_i+\sum_{i=1}^{n}C_{k_i}^2-C_n^2$$

条(其中公共弦至多 $C_n^2$ 条)．因此

$$C_n^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}k_i+\sum_{i=1}^{n}C_{k_i}^2-C_n^2,$$

即

$$2C_n^2\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i(k_i+1)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}k_i^2$$

$$\geqslant\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)^2.$$

结合(2)并化简得

$$\frac{n^2(n-1)}{2}>g^2,$$

从而(1)成立．

用精深的工具已经证明 $n$ 的指数 $\frac{3}{2}$ 可以减少为 $\frac{4}{3}$，猜测

$$g<C_{(\varepsilon)}n^{1+\varepsilon},$$

其中 $\varepsilon$ 为任一正数，$C_{(\varepsilon)}$ 为与 $\varepsilon$ 有关的正的常数(与 $n$ 无关).

另一方面，考虑坐标平面中构成正方形的$[\sqrt{n}]\times[\sqrt{n}]$个格点，可以知道 $\max g>n$. 再利用一点数论知识，由这批格点可以得出

$$\max g>n^{1+\frac{C}{\log\log n}}.$$

对于三维空间，Erdös 证明了

$$g<Cn^{\frac{5}{3}},\tag{3}$$

$$\max g>Cn^{\frac{4}{3}}.\tag{4}$$

金芳蓉将(3)改进为 $g<Cn^{\frac{8}{5}}$(其中 $C$ 均为正的常数).

这些结果还可向高维空间推广.

**例 4** 设 $n$ 个点的距离中有 $k$ 个不同的值，证明

$$k\geqslant\frac{1}{2}(n-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}.\tag{5}$$

**证明** 设 $P$ 为一个已知点，其余 $n-1$ 个点与 $P$ 的距离中，若有$\geqslant\sqrt{n-1}$个互不相同，则(5)已成立. 若不同的距离$<\sqrt{n-1}$，则必有$\geqslant\frac{n-1}{\sqrt{n-1}}=\sqrt{n-1}$个点到 $P$ 的距离相等. 以 $P$ 为心作圆，使该圆上有$\geqslant\sqrt{n-1}$个已知点. 设 $Q$ 为其中一点，$Q_1$, $Q_2$, …, $Q_{m-1}$($m\geqslant\sqrt{n-1}$)为其余的点，则由于同一圆上至多两个点与 $Q$ 的距离相等，$QQ_1$, $QQ_2$, …, $QQ_{m-1}$ 中至少有 $\frac{1}{2}(m-1)\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}-1)$ 个不同的距离，因此(5)成立.

如果开始时取 $P$ 为 $n$ 个点的凸包的顶点，那么凸包在 $P$ 处的内角 $<180°$，所以 $Q$, $Q_1$, $Q_2$, …, $Q_{m-1}$ 都在以 $P$ 为心

的半圆上. 设它们依顺时针次序排列, 则

$$QQ_1<QQ_2<\cdots<QQ_{m-1},$$

从而 $QQ_1, QQ_2, \cdots, QQ_{m-1}$ 中有 $m-1\geqslant\sqrt{n-1}-1$ 个不同距离. 这样(5)可改进为

$$k\geqslant(n-1)^{\frac{1}{2}}-1\geqslant cn^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

已经知道(6)可改进为

$$k\geqslant cn^{\frac{58}{81}-\varepsilon}. \tag{7}$$

另一方面, 考虑格点所成正方形, 可以证明

$$\min k<\frac{cn}{\sqrt{\log n}}. \tag{8}$$

$\Big($在正方形 $1\leqslant x\leqslant[\sqrt{n}]$, $1\leqslant y\leqslant[\sqrt{n}]$ 中, 每两个格点距离的平方 $\leqslant 2n$, 并且可表成两个整数的平方和. 而数论中已证明 $\leqslant 2n$ 并且可表成两个整数的平方和的正整数 $<\dfrac{cn}{\sqrt{\log n}}$. $\Big)$ 以上 $c$ 均表示正的常数.

如果 $n$ 个点组成凸多边形, 可以证明 $k\geqslant\left[\dfrac{n}{2}\right]$. 曾猜测这时存在一个顶点, 自该顶点至少引出 $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 条长度互不相同的线段. 现在这一猜测已被否定.

如果增加一个条件: $n$ 个点中每三点不共线. 在这限制下, 不同距离的个数 $k'$ 的最小值满足

$$\min k'<cn^{\log_2 3}. \tag{9}$$

为了证明(9), 先令 $n=2^m$, 取一个 $m$ 维空间的单位正方体, 它有 $n$ 个顶点(其坐标即 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $x_i=0$ 或 1), 每两点可产生两个向量(方向相反), 以这两点为端点. 这 $n$ 个顶点至多产生 $3^m$ 个不同的向量(可写成 $(x_1-x_1', x_2-x_2', \cdots, x_m-x_m')$,

$x_i-x_i'\in\{0,\ \pm1\}$, $1\leqslant i\leqslant m$)，因此，这 $n$ 个顶点至多产生 $\frac{1}{2}\cdot 3^m$ 个不同的距离．将这个 $m$ 维空间的立方体射影到二维平面上，在无限多个方向中可选择一个射影方向，使得每三个顶点不共线，这样就得到(9)．当 $2^m\leqslant n<2^{m+1}$ 时，(9)至多需要修改常数 $c$ 的值．

**例5** $n$ 个点组成凸 $n$ 边形，证明其中不同距离的个数

$$k\geqslant\left[\frac{n+2}{3}\right]. \tag{10}$$

(这一结果虽不及 $k\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ 精确，但证法比较简单．)

**证明** 考虑这 $n$ 个点的最小覆盖圆，圆上至少有两个已知点．

若最小覆盖圆上恰有两个已知点 $A$、$B$，那么容易知道 $AB$ 必为直径(参见《覆盖》§3 例5)．在以 $AB$ 为直径的两个半圆中必有一个含 $\geqslant\frac{n+2}{2}$ 个已知点(包含 $AB$ 上的已知点在内)，设这些点为 $A$, $B$, $P_1$, $P_2$, $\cdots$, $P_m\left(m\geqslant\frac{n-2}{2}\right)$．在凸四边形 $AP_iP_jB$(图 6.2)中，

图 6.2

$$\angle AP_jB\geqslant90^\circ,\ \angle AP_iP_j>\angle AP_iB\geqslant90^\circ,$$

所以 $AP_j>AP_i$．因此不同距离至少有 $m+1$ 个($AB$, $AP_1$, $\cdots$, $AP_m$)，即

$$k\geqslant m+1\geqslant\frac{n}{2}\geqslant\left[\frac{n+2}{3}\right].$$

若最小覆盖圆上至少有3个已知点，则可从中找出三点 $A$、$B$、$C$ 组成锐角三角形(否则圆还可缩小)，因为 $n$ 个已知点成凸 $n$ 边形，所以 $\triangle ABC$ 内部没有已知点．从而分别以

$AB$、$BC$、$CA$ 为弦的三个弓形中有一个至少含$\left[\frac{n+5}{3}\right]$个点，不妨设以 $AB$ 为弦的弓形至少含$\left[\frac{n+5}{3}\right]$个点. 与上一种情况类似，以 $A$ 为端点的$\left[\frac{n+2}{3}\right]$条线段长度不同.

因此(10)成立.

**例 6** 平面上任给 $n$ 个点，$\lambda_n$ 为这些点间最大距离与最小距离之比，证明

$$\lambda_6 > \sqrt{3}. \tag{11}$$

**证明** 若这 6 点的凸包为凸六边形 $ABCDEF$，则六个内角中必有一个$\geqslant \frac{(6-2)\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$. 不妨设 $\angle BAF \geqslant \frac{2}{3}\pi$，作 $\angle BAF$ 的角平分线交 $BF$ 于 $G$，则(见图 6.3)

$$\begin{aligned} BF = BG + GF &\geqslant AB \sin\frac{\pi}{3} + AF \sin\frac{\pi}{3} \\ &\geqslant \sqrt{3}\ \min(AB,\ AF), \end{aligned} \tag{12}$$

从而

$$\lambda_6 \geqslant \frac{BF}{\sin(AB,\ AF)} \geqslant \sqrt{3}. \tag{13}$$

(12) 中的等号仅在 $\angle BAF = \frac{2}{3}\pi$，$AB = AF$ 时成立. 从而 (13) 中的等号仅可能在六边形为正六边形(各角均为 $\frac{2\pi}{3}$ 并且各边相等)时成立. 但这时

$$\lambda_6 \geqslant \frac{AD}{AB} > \sqrt{3},$$

因此(13)必须是严格的不等式.

若这 6 点的凸包是凸 $n$ 边形，$3 \leqslant n \leqslant 5$，则必有一点 $A$ 在上述凸 $n$ 边形内. 将该 $n$ 边形分为几个三角形，$A$ 必在一个

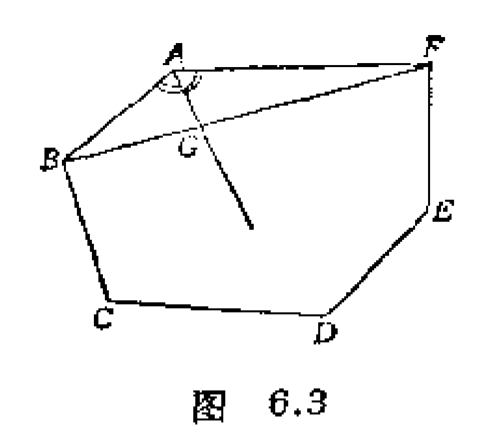



图 6.3

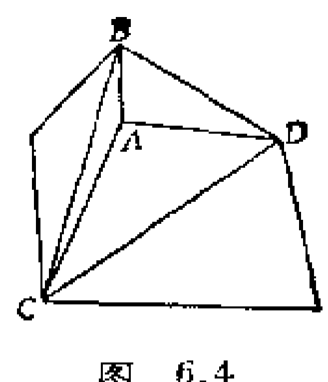



图 6.4

三角形中. 不妨设 $\triangle BCD$ 含 $A$(图 6.4), 则因为

$$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB=2\pi,$$

$\angle BAC$、$\angle CAD$、$\angle DAB$ 中必有一个 $\geqslant\frac{2\pi}{3}$. 不妨设 $\angle BAC\geqslant\frac{2\pi}{3}$, 则与上面(13)类似,

$$\lambda_6\geqslant\frac{BC}{\min(BA,\ CA)}\geqslant\sqrt{3}. \tag{14}$$

(14) 仅当 $\triangle BCD$ 是正三角形而且 $A$ 为其重心时才可能成为等式, 并且这时其他点均在以 $A$ 为心、$AB$ 为半径的圆外或圆上(到 $A$ 的距离不小于 $BA$), 又在以 $B$ 为心, $BC$ 为半径的圆内或圆上, 而同时满足这两个要求的点只有 $C$、$D$. 因此其他点仍使(14)成为严格的不等式.

若这 6 点的凸包为线段 $AB$, 则对在 $AB$ 内部的点 $C$,

$$\lambda_6\geqslant\frac{AB}{\min(AC,\ CB)}\geqslant 2>\sqrt{3}.$$

于是(11)成立.

比(11)更好的结果见研究问题 22.

可以证明 $\lambda_n\geqslant 2\sin\frac{n-2}{2n}\pi(n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots)$, 并且在 $n\geqslant 6$ 时, $\lambda_n>2\sin\frac{n-2}{2n}\pi$. 而在 $n=3,\ 4,\ 5$ 时 $\min\lambda_n=2\sin$

$\frac{n-2}{2n}\pi$. 当 $n$ 很大时，上述估计十分粗糙$\left(2\sin\frac{n-2}{2n}\pi\to 2\right)$. 据陈计的意见，可证 $\lambda_{10}>2$. 易知直径为 1 的点集可被边长为 1 的正方形覆盖（«覆盖»第 43 页）. 将该正方形分为 9 个边长为 $\frac{1}{3}$ 的小正方形. 若有 10 个已知点在这个正方形中，则必有两个点在同一个小正方形中，它们的距离 $\leqslant\frac{\sqrt{2}}{3}$，从而 $\lambda_{10}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}/3}=\frac{3}{\sqrt{2}}>2$.

实际上，可以证明 $\lambda_n\geqslant\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{2}}$，即下面的例 7.

**例 7** 平面上 $n(\geqslant 4)$ 个点，每两点间的距离 $\leqslant 1$. 证明其中必有两个点的距离 $\leqslant\frac{\sqrt{2}}{[\sqrt{n}]}$.

**证明** 首先作两条平行直线 $l_1$、$l_2$，使这 $n$ 个点都在 $l_1$、$l_2$ 所夹的带形内. 平行移动 $l_1$、$l_2$，直至 $l_1$、$l_2$ 上都有已知的点. 这时 $l_1$、$l_2$ 之间的距离 $\leqslant 1$.

类似地，可作两条直线 $l_3$、$l_4$ 均与 $l_1$ 垂直，$l_3$、$l_4$ 的距离 $\leqslant 1$，并且已知点全在 $l_3$、$l_4$ 之间.

于是，已知的 $n$ 个点可以"装在"一个边长为 1 的正方形 $A$ 中.

将正方形 $A$ 等分为 $[\sqrt{n}]^2$ 个小正方形，每个小正方形的边与正方形 $A$ 的边平行，边长为 $\frac{1}{[\sqrt{n}]}$.

如果 $\sqrt{n}$ 不是整数，那么 $n>[\sqrt{n}]^2$，从而必有两个已知点落入同一个小正方形中，它们间的距离 $\leqslant\frac{\sqrt{2}}{[\sqrt{n}]}$.

如果 $\sqrt{n}$ 是整数，设 $\sqrt{n}=k$. 当某个小正方形中有两个已知点时结论成立，否则每个小正方形中恰有一个已知

点.

在图6.5中，两相邻方格里的已知点 $P_i$、$P_{i+1}$ 的距离 $>\frac{\sqrt{2}}{k}$，而纵坐标 $y_i$ 与 $y_{i+1}$ 的差 $\leqslant\frac{1}{k}$，所以横坐标之差

$$x_{i+1}-x_i>\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)^2-\left(\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{1}{k}.$$

于是 $x_k-x_1=(x_k-x_{k-1})+(x_{k-1}-x_{k-2})+\cdots+(x_2-x_1)>\frac{k-1}{k}$，更有 $P_1P_k>\frac{k-1}{k}$.

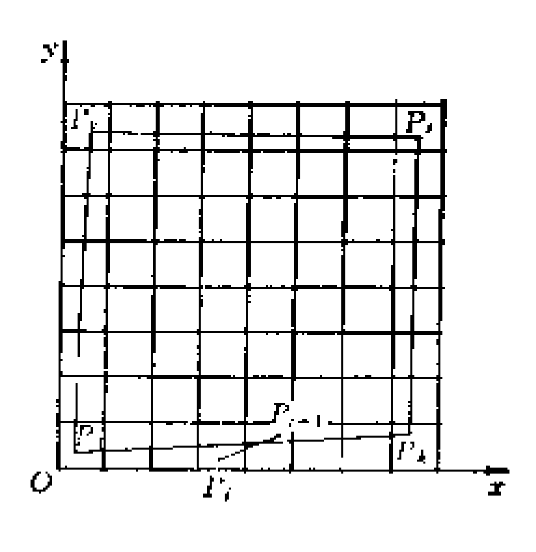



图 6.5

同理，$P_kP_s$、$P_sP_v$、$P_vP_1$ 均大于 $\frac{k-1}{k}$.

在 $k\geqslant4$ 时，$\angle P_vP_sP_k<90^\circ+2\times45^\circ=180^\circ$. 从而四边形 $P_1P_kP_sP_v$ 是凸四边形，它的内角必有一个 $\geqslant90^\circ$. 不妨设 $\angle P_1P_kP_s\geqslant90^\circ$，则

$$P_1P_s\geqslant\sqrt{P_1P_k^2+P_kP_s^2}>\sqrt{2}\cdot\frac{k-1}{k}\geqslant\frac{3}{4}\sqrt{2}>1.$$

与已知矛盾. 因此，已知点中必有两点的距离 $\leqslant\frac{\sqrt{2}}{k}$.

在 $k=2$ 时，$n=4$. 如果 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 的凸包为四边形 $P_1P_2P_3P_4$，那么与上一段证明类似，最长的对角线至少是最短边的 $\sqrt{2}$ 倍，从而最短边 $\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 如果 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 的凸包是三角形或线段，那么 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 间的最短距离 $\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

在 $k=3$ 时，$n=9$. 不妨设以已知点为端点的线段中，

$P_1P_2$ 最长并且 $P_1P_2=1$，则其余的 7 个点都在 $\odot(P_1,1)\cap\odot(P_2,1)$ 中．不妨设在 $P_1P_2$ 上方至少有 4 个已知点．

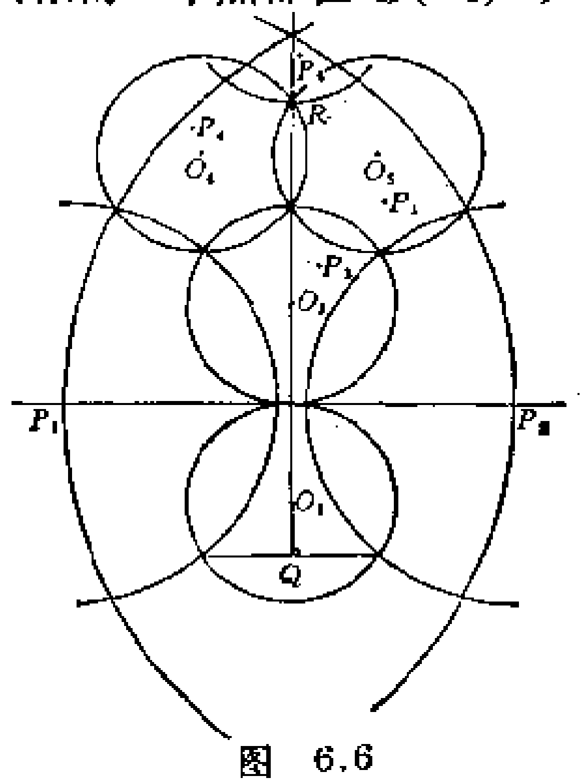


图 6.6

如果每两个点距离 $>\frac{\sqrt{2}}{3}$，那么其余 7 点均在 $\odot\left(P_1,\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cup\odot\left(P_2,\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ 之外，并且每个直径为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 的圆内至多含一个已知点．图 6.6 中的 $\odot O_3$、$\odot O_4$、$\odot O_5$、$\odot O_6$、$\odot O_7$ 都是这样的圆，于是 $P_1P_2$ 上方恰有 4 个已知点 $P_3$、$P_4$、$P_5$、$P_6$．易知图中 $RQ>1$，所以 $P_1P_2$ 下方的已知点必在 $\odot O_7$ 内，因而只有一个．这与已知矛盾．

上述证明是尚强先生告诉作者的．

**例 8** 平面上是否存在一个有限点集 $A_n$，使得 $A_n$ 中每个点恰与 $A_n$ 中 $n$ 个点的距离为 1？

**解** $n=1$ 时，任意两个距离为 1 的点组成合乎要求的集合 $A_1$．

假设已有集 $A_n$．以 $A_n$ 中每一点 $P$ 为心，1 为半径作圆．作半径通过这些圆的公共点，再作半径通过圆上 $A_n$ 的点．所作半径的条数是有限的，因而存在一个方向 $\alpha$ 与这些半径都不平行．

将点集 $A_n$ 依方向 $\alpha$ 平移 1 个单位得点集 $A_n'$．令

$$A_{n+1}=A'\cup A_n.$$

对 $A_{n+1}$ 中任一点 $P$，不妨设 $P\in A_n$．由 $\alpha$ 的定义，$P$ 平

移后所得的点 $P'\notin A_n$. 因此，$P$ 至少与 $A_{n+1}$ 中 $n+1$ 个点(其中 $n$ 个在 $A_n$ 中，1 个为 $P'$)的距离为 1. 对于 $A_n'$ 中任一点 $Q'\neq P'$，设 $Q'$ 是由 $Q\in A_n$ 平移而得，则 $QQ'=1$ 并且 $QQ'$ 与 $\alpha$ 平行，因此由 $\alpha$ 的定义 $PQ'\neq 1$. 即 $P$ 恰与 $A_{n+1}$ 中 $n+1$ 个点的距离为 1.

这样，由 $A_1$ 出发可以逐步造出合乎要求的集合 $A_2$, $A_3, \cdots, A_n, \cdots$.

纵横坐标均为整数的点称为整点(格点). 纵横坐标均为有理数的点称为有理点. 下面的几个例题与整点或有理点有关.

**例 9** 是否对每个自然数 $n$，都存在一个圆，在这圆的内部恰好有 $n$ 个整点?

**解** 取一个非有理点 $I_{(\sqrt{2},\sqrt{3})}$，以 $I$ 为圆心作圆，这个圆上不可能有两个(或更多个)有理点. 不然的话，设有两个有理点 $A_{(x_A,y_A)}$, $B_{(x_B,y_B)}$ 在这圆上，则

$$(x_A-\sqrt{2})^2+(y_A-\sqrt{3})^2 =(x_B-\sqrt{2})^2+(y_B-\sqrt{3})^2, \tag{15}$$

化简得

$$(2x_A-2x_B)\sqrt{2}+(2y_A-2y_B)\sqrt{3} =x_A^2+y_A^2-x_B^2-y_B^2. \tag{16}$$

由于 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、1 在 $\boldsymbol{Q}$ 上线性无关(参见 §5 例 4)，从(16)得出 $x_A=x_B$, $y_A=y_B$，即 $A$、$B$ 只能是同一个点.

于是，可将整点按照它们与 $I$ 的距离的大小(从小到大)排成 $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots$. 取 $r$ 满足 $IA_n<r<IA_{n+1}$，则以 $I$ 为心，$r$ 为半径的圆，内部恰好有 $r$ 个整点.

**例 10** 若平面无穷点集 $M$ 中任两点的距离为整数，证明 $M$ 中的点在一条直线上. 是否有一平面点集 $M$ 由 1997

个点组成，并且 $M$ 中任两点的距离为整数？

解　先设 $M$ 是无穷点集，且 $M$ 中有 $A$、$B$、$C$ 三点不共线．$M$ 中任一点 $D$ 到 $A$、$B$的距离为整数，所以 $|DA-DB|$ 也是整数．上述差$\leqslant AB$，因而只有有限多种取值．对应于每一个差，有一条以 $A$、$B$ 为焦点的双曲线（线段 $AB$ 的垂直平分线，我们也当作双曲线）．$D$ 必在这种双曲线上．

同理，$D$ 也在以 $A$、$C$ 为焦点的有限多条双曲线（包括线段 $AC$ 的垂直平分线）上．

每两条双曲线至多 4 个交点，从而 $D$ 只有有限个，与 $M$ 为无穷集矛盾．

我们可以找出 1997 个整点，每两点的距离为整数，做法如下：

在 $y$ 轴上取一点 $B(0, b)$，其中

$$b=2\times2\times3\times5\times\cdots\times p_{1996},$$

$p_{1996}$ 为第 1996 个素数．显然 $b$ 至少有 1996 种不同的方式表示为

$$b=2\times m\times n \tag{17}$$

的形式$\left(n \text{ 可为 } 2,\ 3,\ \cdots,\ p_{1996} \text{ 中任一个，} m=\frac{b}{2n}\right)$，$m$、$n$ 都是整数，并且 $m>n$．

对每一种形如(17)的表示，在 $x$ 轴上取一点 $A_n(m^2-n^2, 0)$．

$$A_nB=\sqrt{(m^2-n^2)^2+(2mn)^2}=m^2+n^2$$

是整数．显然，每两个点 $A_i$、$A_j$($1\leqslant i<j\leqslant1996$)之间的距离是整数．因此，$B$ 及 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_{1996}$ 即为所求．

例 **11**　平面点集 $M$ 具有如下特性：任一点 $A$ 至少与 $M$ 中一个点的距离为无理数，问 $M$ 至少含几个点？

**解** 任两点的垂直平分线上有到这两点的距离均为有理数的点，因此 $M$ 的元数 $|M|>2$.

在 $x$ 轴上取横坐标为 $0$、$1$、$\sqrt[3]{2}$ 的三点. 平面上任一点 $A_{(x,y)}$ 到这三点的距离如果都是有理数，那么

$$x^2+y^2,\ (x-1)^2+y^2,\ (x-\sqrt[3]{2})^2+y^2$$

都是有理数.从前二者导出 $x$ 为有理数，$y^2$ 为有理数.这时 $(x-\sqrt[3]{2})^2$ 为有理数， 即有 $\sqrt[3]{4}-2x\sqrt[3]{2}+r=0$，$r$ 为有理数.将此式两边同乘 $\sqrt[3]{2}$ 得 $-2x\sqrt[3]{4}+r\sqrt[3]{2}+2=0$. 消去 $\sqrt[3]{4}$ 产生

$$(r-4x^2)\sqrt[3]{2}+(2+2xr)=0.$$

由于 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数，必有 $r-4x^2=0$，$2+2xr=0$，从而 $x=-\frac{1}{4}$，$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$ 不是有理数.矛盾!

因此，任一点 $A$ 到 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(\sqrt[3]{2},\ 0)$ 三点的距离中至少有一个是无理数. 这表明 $M$ 至少含三个点.

**注** 上面的证明实际上是 $\sqrt[3]{2}$ 不能用有理数及二次无理数 $\sqrt{a}$ 线性表出.

研究曲线上的整点是一个重大课题，属于算术代数几何(例如费马大定理即 $x^n+y^n=1$ 上有无有理点). 我们这本小册子不拟讨论.

下面的问题可用复数或向量作为工具.

**例 12** $n$ 个点，每两点之间的距离 $\geqslant 2$. 设点 $O$ 到这些点的距离为 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \geqslant 2(n-1). \tag{18}$$

**证明** 不妨设 $O$ 为原点. 这 $n$ 个点的向量表示为 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$，则由于每两点之间的距离 $\geqslant 2$，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)^2\geqslant 4\sum_{i=1}^{n}(n-1)=4n(n-1). \tag{19}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)^2&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)\cdot(a_i-a_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^2+a_j^2-2a_i\cdot a_j)\\&=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^2-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\cdot a_j\\&=2n\sum_{i=1}^{n}r_i^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\\&\leqslant 2n\sum_{i=1}^{n}r_i^2.\end{aligned} \tag{20}$$

由(19)、(20)立即得出(18)。

显然仅在 $n=3$ 并且三点构成正三角形，以 $O$ 为中心时，(18)中等号成立。

本题可推广至高维空间。

**例 13** 直线上有 $2n$ 个点，$n$ 个点染成红色，$n$ 个点染成蓝色。证明同色点之间距离的和不大于异色点之间距离的和。直线改为平面或空间，这一结论是否仍然成立？

**证明** 不妨设这条直线为 $x$ 轴，红色点的坐标为

$$x_1<x_2<\cdots<x_n,$$

蓝色点的坐标为

$$y_1<y_2<\cdots<y_n.$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-y_j|&>\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|x_i-y_j|+|x_j-y_i|)\\&\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-y_i+y_j-x_i)\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|y_i-y_j|,\end{aligned}$$

即结论成立。

对于平面的情况，设红色点的向量表示为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；蓝色点的向量表示为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 又设 $l$ 为一条直线，$l$ 上的单位向量为 $a$，$x_i-y_j$、$x_i-x_j$、$y_i-y_j$ 与 $a$ 所夹的角分别为 $\phi_{ij}$、$\psi_{ij}$、$\theta_{ij}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i\cdot a-y_j\cdot a|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-y_j|\cdot|\cos\phi_{ij}|, \qquad (21)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}|x_i\cdot a-x_j\cdot a|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}|x_i-x_j|\cdot|\cos\psi_{ij}|, \quad (22)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}|y_i\cdot a-y_j\cdot a|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}|y_i-y_j|\cdot|\cos\theta_{ij}|. \quad (23)$$

考虑各点在 $l$ 上的射影，根据对于直线所得的结论，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i\cdot a-y_j\cdot a|\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|x_i\cdot a-x_j\cdot a|+|y_i\cdot a-y_j\cdot a|).$$

由(21)、(22)、(23)，上式即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-y_j|\cdot|\cos\phi_{ij}|$$
$$\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(|x_i-x_j|\cdot|\cos\psi_{ij}|+|y_i-y_j|\cdot|\cos\theta_{ij}|).$$
$$(24)$$

让 $l$ 绕原点旋转 $2\pi$，这时 $\phi_{ij}$, $\psi_{ij}$, $\theta_{ij}$ 均旋转 $2\pi$，因此对(24)取积分得

$$\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-y_j|\,|\cos\phi|d\phi$$
$$\geqslant\int_0^{2\pi}\sum_{i<j}|x_i-x_j|\cdot|\cos\psi|d\psi$$
$$+\int_0^{2\pi}\sum_{i<j}|y_i-y_j|\cdot|\cos\theta|d\theta.$$

在上式两边约去 $\int_0^{2\pi}|\cos\phi|d\phi(=4\neq0)$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-y_j|\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|y_i-y_j|,$$

即此时结论仍然成立.

$m$ 维空间情况与此类似，只需将积分 $\int_0^{2\pi}$ 改为对 $m$ 维球面积分.

我们的证法可以导出 W. Levi 的定理：若 $a_{ij}$, $b_{ik}$($1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant s$, $1\leqslant k\leqslant t$)为两组实数，并且不等式

$$\sum_{j=1}^{s}\left|\sum_{i=1}^{r}a_{ij}x_i\right|\geqslant\sum_{k=1}^{t}\left|\sum_{i=1}^{r}b_{ik}x_k\right| \tag{25}$$

在 $x_1$, $x_2$, …, $x_r$ 为实数时成立，那么在 $x_1$, $x_2$, …, $x_r$ 为 $m$ 维向量时(25)也成立.

作为这一定理的应用，我们来解下面的例 14.

**例 14** 证明平行六面体中，12 条棱的长度之和不大于四条对角线长度之和的两倍.

证明 设平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ 分别为 $a$, $b$, $c$，要证明

$$4(|a|+|b|+|c|)$$
$$\leqslant2(|a+b+c|+|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c|). \tag{26}$$

在 $a$、$b$、$c$ 为实数时，改变其中任一个数的符号，(26)左边不变，右边也只改变四项的排列顺序，因此可设 $a$、$b$、$c$ 均为非负实数. 显然

$$2a+2b+2c$$
$$=(a+b+c)+(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c).$$

取绝对值得

$$2a+2b+2c$$
$$\leqslant|a+b+c|+|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c|.$$

即在 $a$、$b$、$c$ 为实数时，(26)成立. 根据 Levi 定理，(26)对于向量 $a$、$b$、$c$ 也成立.

上面所用的取模(绝对值)的方法在证明有关距离的不等式时常常用到.

1971 年《美国数学月刊》有一篇文章，介绍了下面的不等式：

设平面上 $n$ 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, $\Pi$ 表示 $C_n^2$ 个两两距离之积，$\Pi_i$ 表示除去 $P_i$ 后的 $n-1$ 个点之间两两距离之积. 若 $n\geqslant 3$, 则有

$$\sum_{j\neq i}\Pi_j\geqslant c_n\Pi_i. \tag{27}$$

该文证明 $c_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 时(27)成立，并猜测 $c_n$ 可改进为

$$\frac{n-1}{2^{\frac{n-2}{2}}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

$n=3, 4$ 时，该文得出稍强的不等式：$c_n=\frac{n-1}{2^{n-2}}$. 可使(27)成立. 实际上，$n=3$ 即三角形不等式. $n=4$ 时，可叙述成如下形式：

四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 中，$P_1P_4=a$, $P_2P_3=a'$, $P_2P_4=b$, $P_1P_3=b'$, $P_3P_4=c$, $P_1P_2=b'$, 则

$$\frac{bc}{b'c'}+\frac{ca}{c'a'}+\frac{ab}{a'b'}\geqslant\frac{3}{4}. \tag{28}$$

直接用几何方法去证明(28)或(27)，恐怕相当困难.

我们考虑 Langrange 恒等式

$$\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1}\frac{x-\alpha_i}{\alpha_j-\alpha_i}=1. \tag{29}$$

如果以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 及 $x$ 作为 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 及 $P_n$ 的复数表示，那么在(29)两边取模得

$$\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n-1}\frac{P_nP_i}{P_iP_j}\geqslant 1, \tag{30}$$

即

$$\sum_{j\neq n}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{P_iP_j}\geqslant\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{P_nP_i}.$$

两边同乘 $\Pi$ 得

$$\sum_{j\neq n}\Pi_j\geqslant\Pi_n. \tag{31}$$

因此(27)对 $c_n=1$ 成立．这比《美国数学月刊》上的结果及其猜测好得多．(28)中的 $\frac{3}{4}$ 也可改为1，这实际是下面的林鹤一(1873—1935，日本数学家)不等式：

设 $P$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，记 $PA=R_1, PB=R_2, PC=R_3$, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$，则

$$\frac{R_2R_3}{bc}+\frac{R_3R_1}{ca}+\frac{R_1R_2}{ab}\geqslant 1. \tag{32}$$

对于 $n$ 个点的集 $X$，用折线将这些点连结起来，使得从一点出发可以沿着折线走到任何一点(设想这些点是城市，这些折线便形成一个四通八达的公路网络)．如果这些折线(除端点外)互不相交，这个网络便称为 $X$ 的生成树(图6.7(a))．如果允许这些折线相交(交点可作为公路的转运站)，那么这个网络便称为 $X$ 的 Steiner 树(图6.7(b)、(c))．

记 $L(X)$ 为生成树的长度(各折线长的和)的最小值，$L_s(X)$ 为 Steiner 树的长度的最小值．例如 $X$ 由构成单位正方形的4个点组成时，$L(X)=3$(图6.7(a))；$L_s(X)=1+\sqrt{3}$，这最小值在图6.7(c)中(不是(b))达到(参见拙著《几何不等式》习题四第9题)．

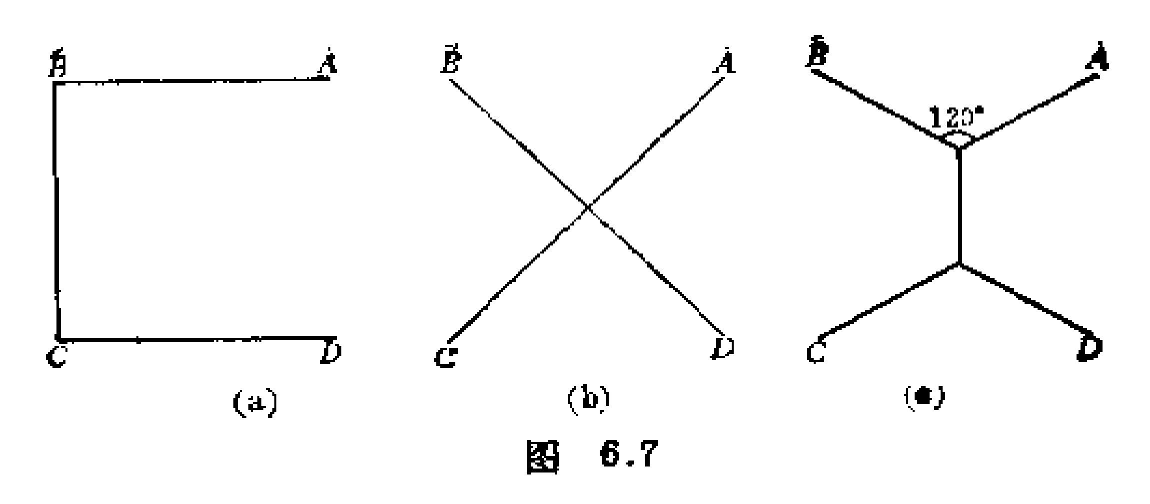


图 6.7

在 $X$ 由边长为1的正三角形的三个顶点组成时，$L(X)=2$(图 6.8(a))，$L_s(X)=\sqrt{3}$(图 6.8(b)).

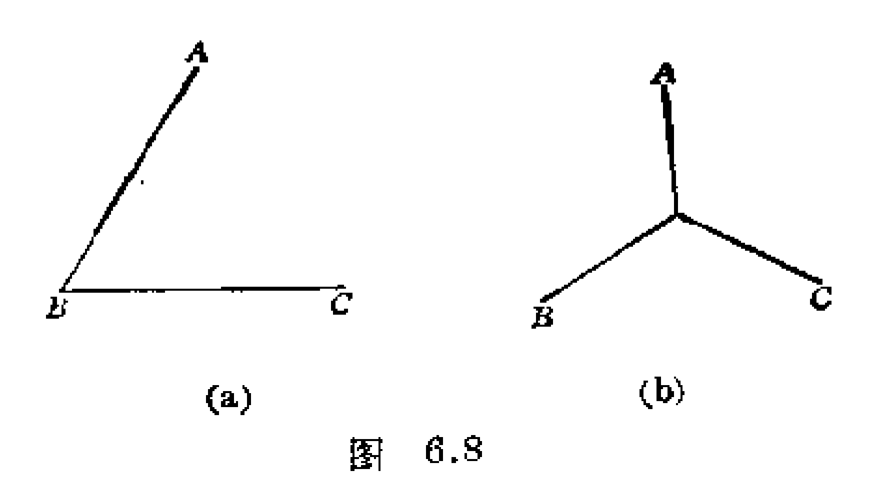


图 6.8

显然 $L_s(X)\leqslant L(X)$. Gilbert 与 Pollack 猜测对所有的 $n$ 元点集 $X$,

$$\min \frac{L_s(X)}{L(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

即在 $X$ 由构成正三角形的三个点组成时，$\frac{L_s(X)}{L(X)}$ 取得最小值. 这一猜测已被堵丁柱与黄光明解决.

$n$ 元点集中，除距离外，还有许多量可以研究. 例如以点集中每三点为顶点所成的三角形有多少种不同的面积？同样面积的有多少个？点集中的点能确定多少个不同的角(以一点

为顶点，并且角的两边至少各通过点集中一个不同于顶点的点)？等等．例如 Erdös 曾证明：

$c_1n^2\log\log n<$单位面积的三角形个数的最大值$<c_2n^{\frac{5}{2}}$，其中 $c_1$、$c_2$ 为正的常数．

又如：

$0.32n-1\leqslant$不同面积的三角形的最小个数$\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]$．

上式右边是 Burton 与 Purdy 证明的，猜测已是最佳．左边是 Erdös 等人证明的．

本书有很多问题都是 Erdös 提出的(例如本节的例 1～例 4)．Paul Erdös，1913 年生于匈牙利布达佩斯，是当代最著名的数学家之一．他毕生致力于数学研究，但却不像一些专业数学家，这些专业数学家是高踞于奥林匹斯山上的神，不食人间烟火，对初等的小问题不屑一顾；Erdös 更像一位业余数学家，他不断抛出形形色色的问题，悬奖征求解答，奖从五美元至一千美元不等，视问题的难易而定．这些问题大都属于数论、几何、组合与图论，不少是初等的．很多年轻人乐意做 Erdös 的问题，Erdös 本人当然更是一位解题高手，有很精湛的技巧．他本人的文章及合作的文章多得不可胜数．鉴于他的杰出贡献，1983 年被授于当代数学的最高奖之一——Wolf 奖(这一年度的另一位获奖者是陈省身先生)．Erdös 对自己的评价则是 PGOM．

什么是"PGOM"？Erdös 解释为"Poor Great Old Man"．"Great"(伟大)，当然是的．"Old"(老)，指年龄(到 1995 年已经 82 岁)．"Poor"，Erdös 回答说"All old men are poor"(所有老人都是贫穷的．poor 也可译为可怜)．但数学的"富"却正是由于 Erdös 这样的 PGOM 的存在！

1988 年，在 Banff 召开的第一届加拿大数论会议上，本书作者有幸见到这位 PGOM．他的讲演并不精采；声音甚低，又常常用身体挡住黑板，只听他念念有词，迅速地写，迅速地擦，不知他说了些什么，也不知道他写了些什么．但讲完之后，人们还是非常热烈地围上去，与他讨论问题，交流想法．

Erdös 没有结过婚，他母亲去世后，就孤身一人，到处漂泊，四海为家．除了数学，他似乎也没有特别的嗜好．有一天中午，他看到我们下围棋，大感兴趣，便要求和我下，但他知道中国人会下“Go”，提出让他四个子．下的时候，他全身“覆盖”在棋盘上(眼睛相当近视)．第一盘输了，又要求再下一盘．第二盘我故意让他赢，他非常高兴，连声说“We are equal”．真是一个 PGOM！

# §7 欧氏 Ramsey 定理

“不可能有完全的无序.”
——T. S. Motzkin

F. P. Ramsey 在 1930 年因黄疸病去世，年仅 26 岁. 但他在哲学、经济学、逻辑学等许多领域都作出了开创性的成果. 数学中的 Ramsey 理论更是冠以他的名字. 事实上，他是这一理论的创始者和奠基人. 1983 年，图论杂志为纪念他诞生 80 周年，出了专集讨论这一理论.

Ramsey 是在 1931 年的一篇讨论数学基础的论文中，证明他的定理的. 有趣的是，Ramsey 在这篇文章中以他的定理为工具来解决一个判定问题，而后者却完全不需要这个定理就能解决. 并且，Ramsey 将解决这个判定问题作为朝着解决一般判定问题的方向迈进的一步，而在他去世一年后，Gödel 证明了解决一般判定问题是不可能的. 因此，Ramsey 在数学上的不朽名声乃是基于他可以不用的一个定理，而这个定理又是在试图完成现在已经知道无法完成的一项任务的过程中证明的！

尽管如此，Ramsey 所发现的定理揭示了“不可能有完全的无序”，引起人们浓厚的兴趣，产生广泛的应用，从一个定理发展成众多定理组成的理论体系，而且发展的势头方兴未艾.

Ramsey 定理可以陈述为如下形式：

对任意给定的自然数 $r$, $k$ 及 $q_1, q_2, \cdots, q_k \geqslant r$, 都存在 $n(r, q_1, q_2, \cdots, q_k)$, 当 $n \geqslant n(r, q_1, q_2, \cdots, q_k)$ 时, 对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有 $r$ 元集的任一种 $k$ 染色(每一个 $r$ 元集"染上" $k$ 种颜色中的一种), 必有一个 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 使得 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 有一个 $q_i$ 元子集, 它的所有 $r$ 元集是同一种颜色的.

用著名的匈牙利组合数学家 Lovász 的话来说, Ramsey 定理的实质就是:

"每一种'不规则'的结构, 只要它足够大, 就会含有指定大小的'规则'子结构".

这就像人们仰望星空, 常常能发现自己所希望看到的规则图形(如成"斗"状的北斗七星). 实际上, 只要星足够多, 找到规则图形是非常自然的.

在 $r=1$ 时, 可取 $n(r, q_1, q_2, \cdots, q_k) = q_1 + q_2 + \cdots + q_k - k + 1$, 这时 Ramsey 定理就是抽屉原理: 将 $q_1 + q_2 + \cdots + q_k - k + 1$ 个数放进 $k$ 个抽屉(染 $k$ 种颜色), 必有一个 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 在第 $i$ 个抽屉中至少有 $q_i$ 个数.

**例 1** 平面上六点, 每两点连一条线段, 所成的图称为完全图 $K_6$. 将 $K_6$ 的边染成红色或蓝色, 证明:

(i) 必存在一个三角形, 三条边同色;

(ii) 必存在一个四边形 (不一定是简单四边形, 更不一定是凸四边形), 四条边同色.

**证明** (i) 这是图论中最著名的问题, 很多书中都有(例如拙著《趣味的图论问题》, 上海教育出版社 1980 年出版), 这里不再赘述. 读者可仿照(ii)自行补出证明.

(ii) 设点 $A_1$ 引出的五条线段中, 红色多于蓝色.

若 $A_1A_2$、$A_1A_3$、$A_1A_4$、$A_1A_5$ 四条边都是红色, 则 $A_6A_2$、$A_6A_3$、$A_6A_4$、$A_6A_5$ 中有两条红边时, 结论已经成立. 设前三

条均为蓝色. $A_5A_2$、$A_5A_3$、$A_5A_4$ 中必有两条同色，设 $A_5A_2$、$A_5A_3$ 同色. 这时四边形 $A_1A_2A_5A_3$ 或四边形 $A_6A_2A_5A_3$ 中必有一个四边同色.

若 $A_1A_2$、$A_1A_3$、$A_1A_4$ 三边为红色，$A_1A_5$、$A_1A_6$ 为蓝色，则 $A_5A_2$、$A_5A_3$、$A_5A_4$ 中有两条红边时，结论已经成立. 设前两条均为蓝色. $A_6A_2$、$A_6A_3$ 中若有一条为蓝色，则有蓝色四边形 $A_6A_2A_5A_1$ 或 $A_6A_3A_5A_1$. 若 $A_6A_2$、$A_6A_3$ 均为红色，则有红色四边形 $A_6A_2A_1A_3$.

例 1 中的六不能改为更小的数. 图 7.1 表明完全图 $K_5$ 染成两色，不一定有同色三角形，也不一定有同色四边形.

图 7.1

例 1 属图论中的 Ramsey 理论.

本节主要讨论几何中的 Ramsey 理论. 这一研究领域是 Erdös, Graham 等人开拓的，他们连续发表了三篇题为 Euclidean Ramsey Theorems 的文章，我们也就袭用这一名称作为本节的标题.

**例 2** 将平面上每个点染上红色或蓝色，证明必有两个同色的点距离为 1.

**证明** 取一个边长为 1 的正三角形. 三个顶点染上两种颜色，其中必有两点同色. 这两点即为所求.

**例 3** 将平面上每个点染上红、黄、蓝三种颜色之一，证明必有两个同色的点距离为 1.

**证明** 如图 7.2，以 $A$ 为顶点作两个边长为 1 的正三角形：$\triangle ABC$，$\triangle ADE$. 再以 $BC$、$DE$ 为底各作一个正三角形：$\triangle BCF$，$\triangle DEG$. 让菱形 $ADGE$ 绕 $A$ 旋转，直至 $FG=1$（当 $G$ 与 $F$ 重合时，$FG=0$. 当 $G$ 与 $F$、$A$ 共线而不与 $F$

重合时，$FG=2\sqrt{3}>1$. 所以 $G$ 必有一个位置使 $FG=1$)

这时，若没有同色的点距离为 1，则 $A$、$B$、$C$ 三点颜色各不相同，$B$、$C$、$F$ 三点颜色也各不相同，从而 $F$ 与 $A$ 颜色相同. 同理 $G$ 与 $A$ 颜色相同. 因此 $F$、$G$ 颜色相同，而 $F$、$G$ 的距离为 1. 矛盾!

图 7.2

**注** 设菱形 $ABFC$ 绕 $A$ 旋转 $\alpha$ 得菱形 $ADGE$，使 $FG=1$，则 $\triangle AFG$ 中，$AF=AG=\sqrt{3}$，$FG=1$. 从而可算出顶角 $\alpha=\angle FAG=2\times\arcsin\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}\approx 33.56°$. 具体作图时，可先根据边长作出 $\triangle AFG$，再作出四个正三角形.

用 $\chi(E^2)$ 表示将欧氏平面 $E^2$ 用 $k$ 种颜色染色（每个点染上这 $k$ 种颜色中的任一种），使得每两个同色点的距离均不为 1 的 $k$ 的最小值. 例 1、例 2 表明

$$\chi(E^2)\geqslant 4. \tag{1}$$

**例 4** 证明欧氏平面 $E^2$ 可用 7 种颜色染色，使得每两个同色点的距离均不为 1，即

$$\chi(E^2)\leqslant 7. \tag{2}$$

**证明** 如图 7.3（这也就是 §5 中表明正六边形可铺满平面的图）. 每个正六边形染一种颜色，用数表示. 这里每个正六边形包括它的左下方的边界在内（如图中正六边形 $ABCDEF$ 包括折线 $ABCD$），但不包括该边界的两个端

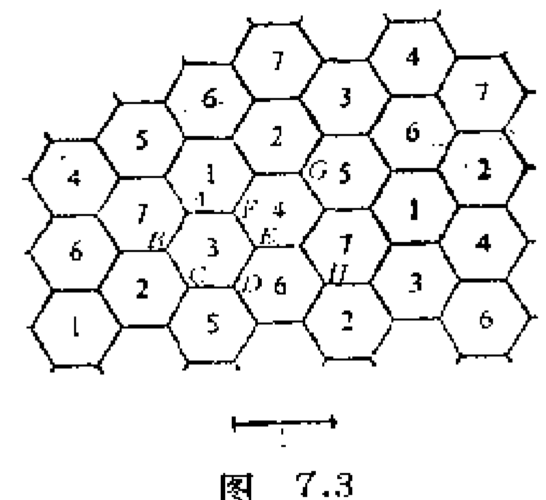


图 7.3

点(不包括 $A$、$D$ 两点)及整个右边边界. 即折线 $ABCD$ 上除 $A$、$D$ 两点均染颜色 3, 线段 $AF$ 除 $F$ 外均染颜色 1, 线段 $FE$ 染颜色 4, 线段 $ED$ 除 $E$ 外均染颜色 6.

设正六边形的边长为 $a$. 同一个正六边形内的两点, 距离 $\leqslant 2a$. 同色的两个正六边形内各取一个点, 它们的距离 $\geqslant$ 图 7.3 中的 $GH = a\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}\,a$. 因此, 取 $a$ 使

$$2a < 1 < \sqrt{7}\,a$$

(例如 $a = 0.45$), 则图 7.3 中每两个同色点的距离不为 1. 因此(2)成立.

迄今为止, 人们只知道 $4 \leqslant \chi(E^2) \leqslant 7$, 但不知道究竟 $\chi(E^2)$ 是 4、5、6、7 中的哪一个.

下面讨论几个将平面 2 染色的问题(例 5～例 14). 我们假定平面上每一点染成红色或蓝色, 并且每种颜色均至少染了一个点(如果所有点都是同一种颜色, 那就失去讨论的意义了).

**例 5** 证明必有两点 $A$、$B$ 与 $AB$ 的中点 $C$ 同色.

**证明** 两种颜色中至少有一种染了无穷多个点, 因此必有 $A$、$B$ 两点同色, 不失一般性, 可设 $A$、$B$ 均为红色.

若 $A$、$B$ 的中点 $C$ 为红色, 则结论成立. 设 $C$ 为蓝色.

在直线 $AB$ 上取 $D$、$E$, 使 $DA = AB = BE$(图 7.4). 若 $D$ 或 $E$ 为红色, 则 $D$、$A$、$B$ 或 $A$、$B$、$E$ 三点为所求. 若 $D$、$E$ 均为蓝色, 则 $D$、$C$、$E$ 三点即为所求.

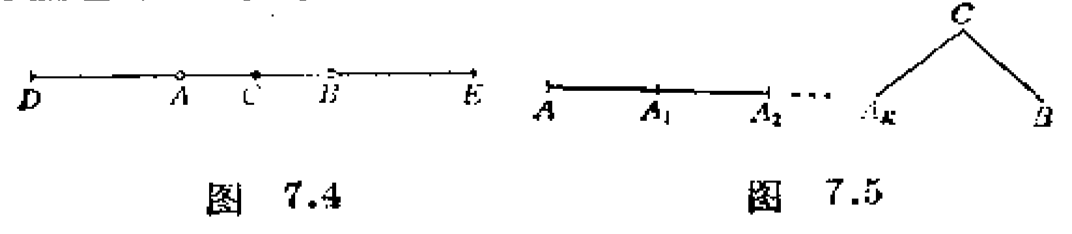



图 7.4　　　　图 7.5

**例 6** 证明必有两个异色点距离为 2.

**证明** 平面上必有 $A$、$B$ 两点异色. 若 $AB<4$, 则以 $AB$ 为底可作一腰为 2 的等腰三角形 $ABC$. $C$ 必与 $A$、$B$ 之一异色, 从而结论成立.

若 $AB\geqslant 4$, 在线段 $AB$ 上取 $A_1$, 使 $AA_1=2$. 若 $A_1$ 与 $A$ 异色, 结论已经成立. 若 $A_1$ 与 $A$ 同色, 则用 $A_1$ 代替 $A$ 进行讨论. 这样继续下去, 在线段 $AB$ 上得到一串与 $A$ 同色的点 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_k$,

$$AA_1=A_1A_2=\cdots=A_{k-1}A_k=2,$$

并且 $A_kB<4$(图 7.5). 按照一开始的讨论, 可得点 $C$, $CA_k=CB=2$, 并且 $C$ 与 $A$、$B$ 之一异色.

**例 7** 存在两条直角边分别为 1、$\sqrt{3}$ 的直角三角形, 它的顶点同色.

**证明** 由例 2, 存在两个同色点的距离为 2(该处的 1 其实可改为任一长度). 设这两点为 $A$、$D$. 以 $AD$ 为直径作圆. 设正六边形 $ABCDEF$ 内接于这个圆(图 7.6). 若 $B$、$C$、$E$、$F$ 中有一点与 $A$ 同色, 则它与 $A$、$D$ 构成所说的直角三角形. 若 $B$、$C$、$E$、$F$ 均与 $A$ 不同色, 则 $\triangle BCE$ 即为所求.

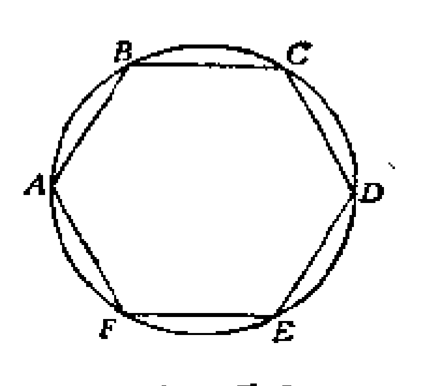


图 7.6

1976 年, L. Shader 证明了远比例 7 一般的结论: (在平面二染色时) 对于任意的直角三角形, 存在与它全等的(三个顶点)同色的三角形. 这一结论将在例 14 中证明.

**例 8** 证明: 如果有一个同色的直角三角形, 直角边的长为 $ka$, $kb$, $k$ 为奇数, 那么必有一个同色的直角三角形, 直角边的长为 $a$, $b$.

**证明** 如图7.7，在直角三角形 $ABC$ 中，$BC=ka$，$AC=kb$，并且 $A$、$B$、$C$ 均为红点。

将直角三角形 $ABC$ 补成矩形 $AWBC$，并将各边 $k$ 等分，设 $CA$ 上分点为 $C_1$, $C_2$, …, $C_{k-1}$；$CB$ 上分点为 $D_1$, $D_2$, …, $D_{k-1}$ 等等.

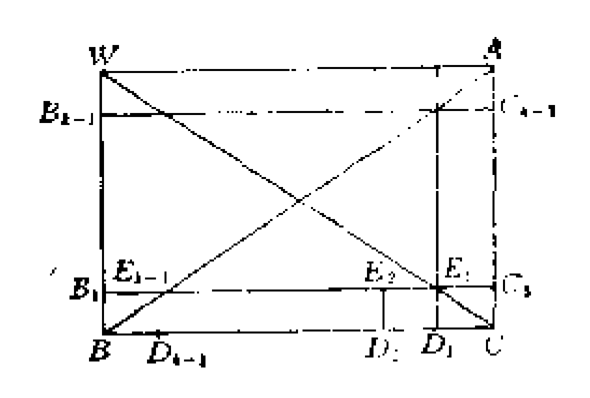



图 7.7

若 $C_1$ 为红点，则图中的矩形 $CC_1E_1D_1$ 中，点 $D_1$、$E_1$ 只要有一个为红点，结论便成立．在点 $D_1$、$E_1$ 均为蓝色时，点 $D_2$、$E_2$ 只要一个为蓝色，结论便成立．依此类推，或者结论成立，或者 $E_{k-1}$、$D_{k-1}$ 均为红点(因为 $k$ 为奇数)．在后一种情况下，$\triangle E_{k-1}D_{k-1}B$ 即为所求.

因此可设 $C_1$ 为蓝点．同样，可设 $B_1$ 为蓝点.

将 $C_1$、$B_1$ 代替 $C$、$B$，进行同样的讨论可知 $C_2$、$B_2$ 均为红点，否则结论已经成立．依此类推，或者结论成立，或者 $C_{k-1}$、$B_{k-1}$ 均为红点(因为 $k$ 为奇数)．在后一种情况下，由于 $A$ 为红点，与 $C_1$ 为红点的讨论相同，结论也一定成立.

Shader 称例 8 可用 Erdös 的"梯子"技巧证明．我们未见到 Erdös 的原始文章，想来与上面的解法大致相同.

**例 9** 证明不一定有边长为 1 的正三角形三个顶点同色.

**证明** 将平面用平行线划分为带形，带形的宽均为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．再将带形(包括下面的边界，不包括上面的边界)染成红或蓝色，使得红、蓝相间．容易验证这时没有边长为 1 的正三角形顶点同色．事实上，由于正三角形的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$（即"宽"为

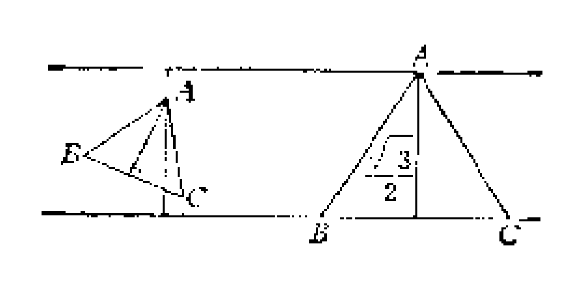




图 7.8

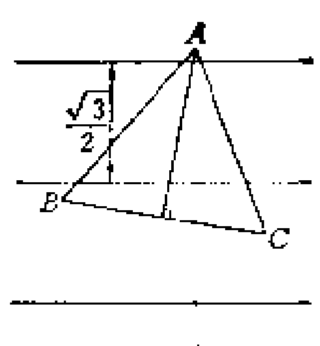



图 7.9

$\left.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，它不可能完全在一个宽为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的带形内，除非它的一边在带形的一条边界上，另一个顶点在带形的另一条边界上，而这时三个顶点颜色不全相同(图 7.8，完全“浸没”在带形中的三角形，高小于带形的宽)；另一方面，如果正三角形的顶点 $A$ 与边 $BC$ 之间“隔着”一个带形(图 7.9)，那么它的高大于带形的宽 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例 9 表明 2 染色时，未必有边长为 $a$ 的正三角形顶点同色．但边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的两个正三角形中，必有一种有同色的三角形．猜测如果没有边长为 1 的正三角形顶点同色，那么其他边长的正三角形均有同色的.

**例 10** 证明边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的正三角形中，必有一种有同色三角形.

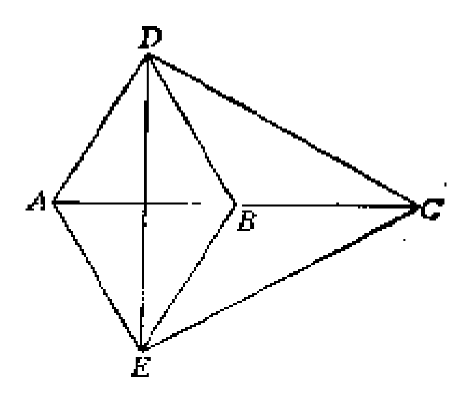



图 7.10

**证明** 如果没有边长为 1 的正三角形顶点同色，那么必有两点相距为 1，颜色一红一蓝，以它们为底作腰长为 2 的等腰三角形，不妨设顶点为红．这样，我们得到长为 2 的线段 $AC$，顶点异色(在例 6 中，已经有这一结论．现在利用上面的假设来证更为

简单).

$AC$ 的中点 $B$ 必定与 $A$ 或 $C$ 之一同色. 不妨设 $A$、$B$ 均红, $C$ 为蓝色. 如图 7.10, 以 $AB$ 为底作正三角形 $ABD$、$ABE$, 则 $D$、$E$ 均为蓝色. $D$、$E$、$C$ 同色, 而且易知三角形 $DEC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形.

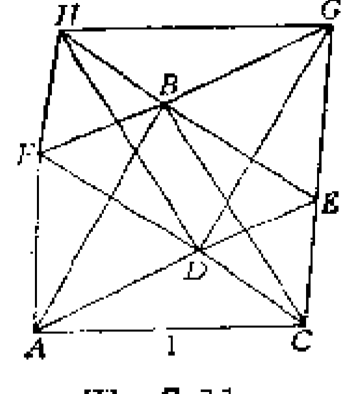


图 7.11

**例 11** 若有一边长为 1 的正三角形顶点同色, 则对任一有一边为 1 的三角形, 均有一个全等三角形顶点同色.

**证明** 如图 7.11, 边长为 1 的正三角形 $ABC$ 顶点均为红色. $\triangle ACD$ 一边为 1, 另两边分别为 $a$、$b$. 作正三角形 $ADF$、$CDE$, 易知 $B$、$F$、$D$、$E$ 成平行四边形. 再作正三角形 $BFH$、$BEG$. 易知三角形 $ABF$、$BCE$、$DHF$、$GHB$、$GDE$ 均与三角形 $ACD$ 全等. 若 $D$、$E$、$F$ 有一个为红色, 结论成立. 设 $D$、$E$、$F$ 均为蓝色. 若 $H$、$G$ 有一个为蓝色, 结论成立. 若 $H$、$G$ 全为红色, 则 $\triangle BHG$ 顶点全为红色.

**例 12** 证明存在同色三角形, 边长为 $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $a$, 其中 $a$ 为任一满足 $\sqrt{6}-\sqrt{2}<a<\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 的实数.

**证明** 由例 10, 存在一同色的正三角形, 边长为 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6}$. 再由例 11 即得结论.

**例 13** 证明:

(i) 如果有一个边长为 3、5、7 的三角形顶点同色, 那么必有一个边长为奇数的正三角形顶点同色;

(ii) 如果有一个边长为 7、13、15 的三角形顶点同色, 那么必有一个边长为奇数的正三角形顶点同色.

**证明** (i) 如图 7.12, $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=5$, $AC$

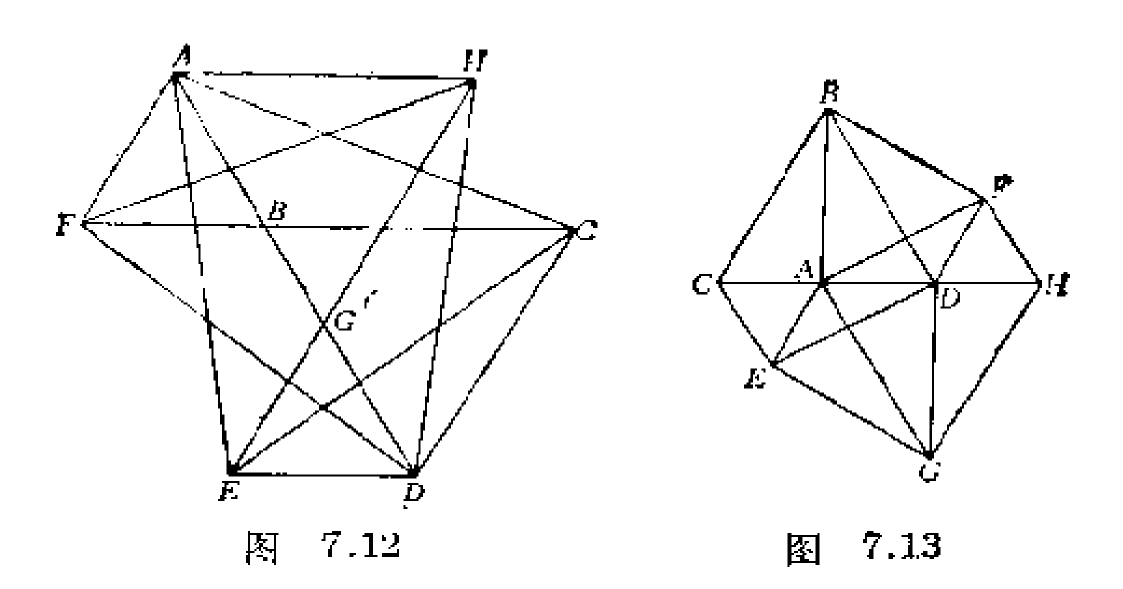



图 7.12　　　　图 7.13

$=7$，并且 $A$、$B$、$C$ 同红．

易知 $\angle ABC=120°$．作正三角形 $BCD$、$ACE$、$ABF$．若 $D$、$E$、$F$ 中有一个为红，结论已经成立．设 $D$、$E$、$F$ 均为蓝色．

易知 $DE=AB=3$，$DF=AC=7$．作正三角形 $DEG$．易知 $G$ 在 $AD$ 上．若 $G$ 为蓝色，结论成立．若 $G$ 为红色，作正三角形 $AGH$．这时 $\triangle HFD$ 也为正三角形．无论 $H$ 为红色或蓝色，均有一同色的正三角形，边长为奇数(易知 $AG=BC=5$)．

(ii) 如图 7.13，$\triangle ABC$ 中，$AC=7$，$AB=13$，$BC=15$，并且 $A$、$B$、$C$ 同红．易知 $\angle BCA=60°$．作图与证明可仿照(i)进行．

**例 14**　证明任一直角三角形都有一个同色三角形与它全等．

**证明**　不妨设该直角三角形有一边长为 1．由例 8，只需证明这个直角三角形的 $h$ 倍 ($h$ 为奇数)与一个同色三角形全等．由例 11，只需证明有一个边长为奇数 $h$ 的正三角形是同色三角形．

由例6，有两个距离为8的点一红一蓝．设 $AB=8$，并且 $A$ 蓝 $B$ 红．作正三角形 $ABC$，不妨设 $C$ 为红色．如图7.14，作成平面网格，每一格点可用坐标$(x, y)$表示（即坐标轴夹角为60°的斜坐标），$x$、$y$ 为整数．

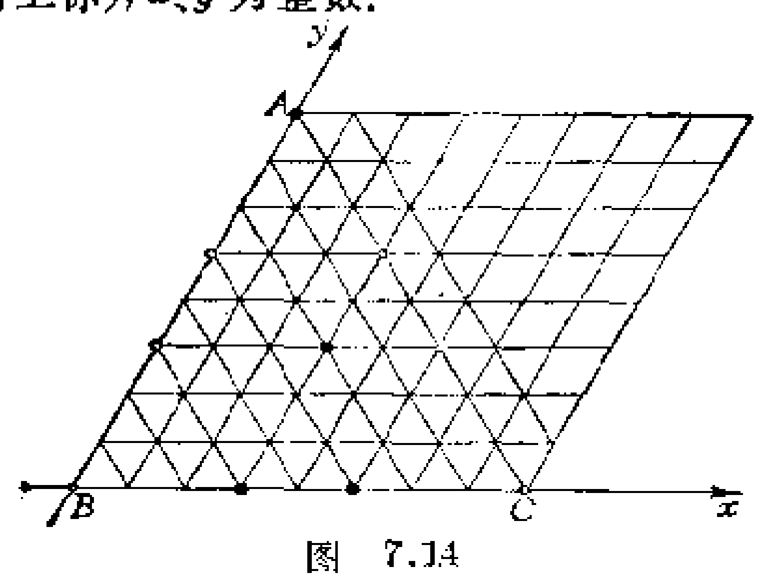



图　7.14

假设没有边长为奇数的正三角形是同色三角形．由例12，边长为 $3k$，$5k$，$7k$ 或 $7k$，$13k$，$15k$ 的三角形（$k$ 为奇数）也都不是同色三角形．

点(0, 3)，(5, 3)与 $A$ 组成边长为5的正三角形，所以(0, 3)，(5, 3)中必有一个为红色．不妨设(0, 3)为红色．这时(3, 0)为蓝色．从而(3, 5)为红色，(0, 5)为蓝色，(5, 0)为红色，(5, 3)为蓝色．以下分四种情况讨论：

(i)　(0, 1)为红色，(0, 2)为蓝色．

不难得出下表：

| 点 | 颜色 | 构成三角形的另两个顶点 |
|---|---|---|
| (1, 0) | 蓝 | (0, 0)，(0, 1) |
| (−1, 1) | 蓝 | (0, 0)，(0, 1) |
| (−3, 8) | 红 | (0, 5)，(0, 8) |
| (−5, 5) | 红 | (0, 5)，(0, 8) |
| (3, 2) | 红 | (0, 2)，(0, 5) |

| (−3, 5) | 红 | (0, 2), (0, 5) |
|---|---|---|
| (2, 0) | 蓝 | (−3, 5), (−3, 8) |
| (2, −1) | 红 | (1, 0), (2, 0) |
| (3, −1) | 红 | (2, 0), (3, 0) |
| (−2, −1) | 蓝 | (3, −1), (3, 2) |
| (−2, 2) | 蓝 | (−5, 5), (3, 2) |
| (−1, 2) | 红 | (−1, 1), (−2, 2) |
| (−2, 1) | 红 | (−1, 1), (−2, 2) |
| (1, −1) | 红 | (−2, −1), (−2, 2) |
| (0, −1) | 蓝 | (0, 0), (1, −1) |
| (−1, −1) | 蓝 | (−1, 2), (2, −1) |
| (−1, 0) | 红 | (−1, −1), (0, −1) |

这时(−2, 0)与(−2, −1)、(−1, −1)构成正三角形，也与(−2, 1)、(−1, 0)构成正三角形， 无论(−2, 0)怎样染色均产生同色三角形.

(ii) (0, 1)为红色, (0, 2)也为红色.

同样有表:

| 点 | 颜色 | 构成三角形的另两个顶点 |
|---|---|---|
| (1, 0) | 蓝 | (0, 0), (0, 1) |
| (1, 1) | 蓝 | (0, 1), (0, 2) |
| (1, 2) | 蓝 | (0, 2), (0, 3) |
| (2, 0) | 红 | (1, 0), (1, 1) |
| (2, 1) | 红 | (1, 1), (1, 2) |
| (−1, 1) | 蓝 | (0, 0), (0, 1) |
| (−1, 2) | 蓝 | (0, 1), (0, 2) |
| (−2, 2) | 红 | (−1, 1), (−1, 2) |
| (3, 2) | 蓝 | (−2, 2), (3, 5) |
| (2, 3) | 蓝 | (2, 0), (5, 0) |
| (2, 2) | 红 | (3, 2), (2, 3) |
| (3, 1) | 蓝 | (2, 1), (2, 2) |
| (4, 0) | 红 | (3, 0), (3, 1) |

点(4, 1)与(4, 0)、(5, 0)构成正三角形，与(3, 1)、(3, 2)也构成正三角形，仍导致矛盾.

(iii) (0, 1)为蓝色，(0, 2)为红色.

| 点 | 颜色 | 构成三角形的另两个顶点 |
|---|---|---|
| (7, 1) | 红 | (0, 1), (0, 8) |
| (7, 0) | 蓝 | (7, 1), (8, 0) |
| (−1, 3) | 蓝 | (0, 2), (0, 3) |
| (−3, 3) | 蓝 | (0, 0), (0, 3) |
| (2, 0) | 红 | (−1, 3), (7, 0) |
| (2, 3) | 蓝 | (2, 0), (5, 0) |
| (2, 6) | 红 | (2, 3), (5, 3) |
| (2, 5) | 蓝 | (2, 6), (3, 5) |
| (2, −2) | 红 | (−3, 3), (2, 3) |
| (5, −3) | 蓝 | (2, 0), (5, 0) |
| (5, 2) | 红 | (2, 5), (5, −3) |
| (8, −1) | 蓝 | (0, 2), (5, 2) |
| (7, −1) | 红 | (7, 0), (8, −1) |

点(7, −2)与(2, −2)、(7, 1)构成正三角形，又与(2, 3)、(−1, 3)构成正三角形. 矛盾!

(iv) (0, 1), (0, 2)均为蓝色.

| 点 | 颜色 | 构成三角形的另两个顶点 |
|---|---|---|
| (1, 1) | 红 | (0, 1), (0, 2) |
| (3, 2) | 红 | (0, 2), (0, 5) |
| (−1, 2) | 红 | (0, 1), (0, 2) |
| (−2, 2) | 蓝 | (3, 2), (3, 5) |
| (−3, 5) | 红 | (0, 2), (0, 5) |
| (−3, 8) | 红 | (0, 5), (0, 8) |
| (2, 0) | 蓝 | (−3, 5), (−3, 8) |
| (2, 1) | 红 | (2, 0), (3, 0) |
| (1, 2) | 蓝 | (1, 1), (2, 1) |

| | | |
|---|---|---|
| (1, −1) | 红 | (−2, 2), (1, 2) |
| (1, 0) | 蓝 | (1, −1), (0, 0) |
| (2, −1) | 红 | (1, 0), (2, 0) |
| (2, −2) | 蓝 | (−1, 2), (2, −1) |
| (1, 3) | 红 | (1, 2), (2, 2) |
| (0, 4) | 蓝 | (0, 3), (1, 3) |
| (1, 4) | 红 | (0, 4), (0, 5) |
| (2, 3) | 蓝 | (1, 3), (1, 4) |
| (−3, 3) | 蓝 | (0, 0), (0, 3) |
| (−2, 3) | 红 | (−3, 3), (−2, 2) |

点(−1, 3)与(−2, 3)、(−1, 2)构成正三角形，与(2, 0)、(2, 3)也构成正三角形．矛盾!

综上所述可知必有边长为奇数的正三角形是同色三角形，从而结论成立．

如果图形 $F$ 在平面 $k$ 染色时，总有一个与它全等的图形是同色的，那么这个图形 $F$ 就称为(在平面 $k$ 染色时)是 Ramsey 的．

在平面 2 染色时，距离为 1 的两个点是 Ramsey 的．例 14 表明直角三角形(意指构成这种直角三角形的三个点)是 Ramsey 的．例 9 表明正三角形不是 Ramsey 的．猜测除正三角形外，所有三角形都是 Ramsey 的．

在平面 3 染色时，长为 1 的线段(即距离为 1 的两个点)仍然是 Ramsey 的．但所有三角形都不是 Ramsey 的．

类似地，可以定义空间中的 Ramsey 图形．

**例 15** 证明在三维空间 2 染色时，正三角形是 Ramsey 的，即有一个边长为 1 的正三角形三个顶点同色．

**证明** 由例 2，有 $A$、$B$ 两点距离为 1 并且同色，设同为红色．

过 $AB$ 中点 $O$ 作平面 $M\perp AB$，在平面 $M$ 上作以 $O$ 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆．圆上每一点到 $A$、$B$ 的距离均为 1，若其中有一点为红色，结论成立．设圆上的点均为蓝色．

在该圆内任取一条长为 1 的弦 $CD$，$CD$ 的中点 $F$ 到 $O$ 的距离为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．与前面相同，到 $C$、$D$ 的距离均为 1 的点在一个圆上，该圆所在平面过 $F$ 并且垂直于 $CD$，圆以 $F$ 为心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径（图 7.15(a)）．

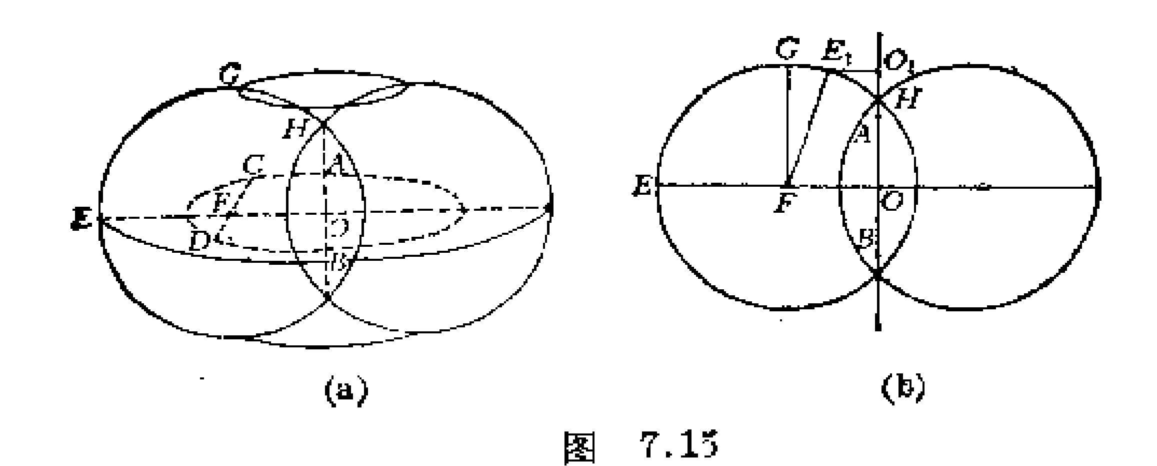



图　7.15

当 $F$ 绕 $O$ 在平面 $M$ 上旋转时，以 $F$ 为心的圆绕 $O$ 旋转形成一个环面．由于 $OF=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以这一环面不像通常的救生圈，没有中间的那个洞．

如果环面上有一个蓝点，结论已经成立．设环面上全为红点．作与 $AB$ 垂直的平面 $N$，截环面得一圆 $K$．当平面 $N$ 与 $M$ 重合时，圆 $K$ 的半径为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$，参见轴截面的图（图 7.15(b)）．当平面 $N$ 向上移动过环面最高点 $G$ 时，圆 $K$ 半径 $=OF=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(>\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$．平面 $N$ 再向下移动过轴截面

上两圆交点 $H$ 时，圆 $K$ 半径为 0（自 $G$ 到 $H$ 的过程中，平面 $N$ 与环面的交线是圆环，圆 $K$ 指里圈的小圆）．因此，在自 $G$ 到 $H$ 的过程中，圆 $K$ 必有达到半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的时刻．不难算出圆心 $O_1$ 与 $O$ 的距离为

$$OO_1=\sqrt{FE_1^2-(FO-F_1O_1)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{12\sqrt{6}-8}}{6}.$$

这时圆 $K$ 的内接正三角形边长为 1，而且顶点全为红色．

由例 11 立即得出在三维空间 2 染色时，一切三角形都是 Ramsey 的．

从例 15 可以看出在空间的维数（平面是二维空间，通常的空间是三维的）升高时，很多性质（如图形 $F$ 是否在 $k$ 染色时为 Ramsey 的）更容易成立．

下面简单地介绍一点 $n$ 维欧氏空间的 Ramsey 理论．

$n$ 维（欧氏）空间就是由全体有序的 $n$ 元实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 组成的点集，记为 $E^n$．$E^n$ 中任意两点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的距离定义为 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}$．其他性质基本与二、三维的情况相同．

**例 16** 证明：

(i) 在平面 2 染色时，正方形不是 Ramsey 的；

(ii) 在 $E^3$ 2 染色时，正方形是 Ramsey 的．

**证明** 不妨设正方形边长为 1．

(i) 与例 9 类似，将平面分为边互相平行的带形，带形的宽 $d=1$．将带形（连同下边界）染成红蓝相间．这时单位正方形的顶点必不同色．

(ii) 考虑坐标中有4个为0, 2个为$\frac{1}{\sqrt{2}}$的点($x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_6$)所成的集合$X$. $X$共有$C_6^2=15$个点.

再在平面上作一个由点$v_1$、$v_2$、$v_3$、$v_4$、$v_5$、$v_6$组成的完全图$K_6$, $K_6$有$C_6^2=15$条边(线段). $X$中每一个点$A$对应于$K_6$的一条边$v_iv_j$, $i$、$j$是$A$的不为0的坐标的足标. $v_iv_j$与$A$染上相同的颜色.

由例1, $K_6$中有一个四边形四条边颜色相同, 因此$X$中有4个点颜色相同. 每两个相邻的点与$K_6$中相邻的边对应, 即有一个非零坐标的足标相同, 从而这两点的距离为

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2}=1.$$

因为每相邻两点距离相同(均为1), 这四点组成菱形. 又不相邻两点距离为

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{2}.$$

所以四点组成正方形.

设$E^n$ 2染色时, 正方形是Ramsey的, $n$的最小值$n_0$应满足

$$3\leqslant n_0\leqslant 6. \tag{3}$$

但$n_0$究竟是多少?现在仍未确定.

虽然维数升高有助于使图形$F$成为Ramsey的, 但并非一定能使每个图形都成为Ramsey的.

**例17** 设$B$是线段$AC$中点. 在四染色时, 对任意$n$, $A$、$B$、$C$三点所成的集在$E^n$中不是Ramsey的.

**证明** 设$O_{(0,0,\cdots,0)}$为坐标原点, 对任意一点$M_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$,

$[OM^2] \bmod 4$ 后与$\{0, 1, 2, 3\}$中一个数 $i$ 同余. 将 $M$ 染上颜色 $i$. 这样, $E^n$ 中每一点被染成 $\{0, 1, 2, 3\}$ 中的一种颜色.

不妨设 $AB=BC=1$, 并且在上述染法中同为颜色 $i$. 令 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, 则由中线公式

$$a^2+c^2=2b^2+2. \tag{4}$$

用$\{x\}$表示 $x$ 的小数部分, 即$\{x\}=x-[x]$, 则由(4)得

$$\{a^2\}+\{c^2\}\equiv 2\{b^2\}+2 \pmod 4. \tag{5}$$

但显然有

$$0\leqslant\{a^2\}+\{c^2\}<1+1=2\leqslant 2\{b^2\}+2\leqslant 3, \tag{6}$$

所以(5)不成立. 矛盾!

如果图形 $F$ 具有性质: "对任意的 $k\geqslant 2$, 均有一个整数 $n(k)$, 只要 $n\geqslant n(k)$, 将 $E^n$ $k$ 染色时, 图形 $F$ 是 Ramsey 的", 那么图形 $F$ 就称为 Ramsey 型. 为避免与前面所说的 "Ramsey 的"混淆, 这里特地多加一个"型"字.

通常 $n(k)$ 都是很大的 (最小的 $n(k)$ 难以准确定出). Ramsey 型图形, 实际上是 $n$ 充分大时, 在 $E^n$ 中为 Ramsey 的.

对于 Ramsey 型, 所得结论非常之少. 重要的有:

(i) $n$ 维长方体的顶点的子集都是 Ramsey 型;

(ii) Ramsey 型的图形一定是 $n$ 维球面的子集.

(i) 是充分条件, (ii) 是必要条件.

1986 年, P. Frankl 与 V. Rödl 证明了每个三角形都是 Ramsey 型. 这表明 (i) 并非必要条件. 因为钝角三角形是 Ramsey 型, 但不是长方体的顶点的子集.

曾有著作介绍 Frankl 等的文章解决了例 14 后的猜测:

"除正三角形外，在 $E^2$ 2 染色时，所有三角形都是 Ramsey 的"。这一说法是不正确的，可能是误解了文章的标题. "All triangles are Ramsey"，没有注意到文章是在 $E^n$($n$ 充分大) 中进行讨论。

# §8 竞赛问题

"重大的科学发现，同解答一道好的竞赛题的差别，仅仅在于解一道竞赛题需要花5小时，而取得一项重大研究成果需要花5000小时。"

——B·H·狄隆涅

本节的问题选自数学竞赛或可以用作竞赛问题.

好的竞赛题往往与科学研究密切相关，有的就是科研的结果或部分结果. 学习这些问题不仅可以作为参加数学竞赛的准备；更重要的，可以借此掌握许多实用的技巧与科研的方法，为走向科学研究铺平道路.

**例1** 平面上3000条直线，其中任两条不互相平行，任三条不通过同一点，这些直线将平面分成许多区域. 证明这些区域中至少有：

(i) 1000个三角形；

(ii) 2000个三角形.

**证明** (i) 对每一条直线 $a$，其他直线的交点中必有一点 $A$ 到 $a$ 的距离最近. 设 $A$ 是直线 $b$、$c$ 的交点，则 $a$、$b$、$c$ 交成一个三角形区域，其他直线都不穿过这个区域，否则该直线与 $b$ 或 $c$ 的交点距 $a$ 更近，与 $A$ 的最小性矛盾.

于是，每条直线 $a$ 至少产生一个三角形区域，共产生3000

个三角形区域. 但每个三角形区域可能被算了 3 次, 因此三角形区域的个数$\geqslant\frac{3000}{3}=1000$.

(ii) 如果直线 $a$ 的两侧都有其他直线的交点, 那么可设 $A$ 是一侧的交点中距 $a$ 最近的点, $A'$ 是另一侧的交点中距 $a$ 最近的点. 与(i)类似, $a$ 至少产生 2 个三角形(一侧一个).

可能有直线, 使其他直线的交点都在它的一侧. 这样的直线至多 2 条. 事实上, 如果 $s_1$、$s_2$、$s_3$ 都是这样的直线, 那么它们将平面分为 7 个部分(图 8.1). 所有直线的交点都在 $P_2P_3$ 的含 $P_1$ 的一侧, $P_1P_3$ 的含 $P_2$ 的一侧, $P_1P_2$ 的含 $P_3$ 的一侧, 因而都在 $\triangle P_1P_2P_3$ 内. 但任一条直线都与该三角形一边的延长线相交, 矛盾.

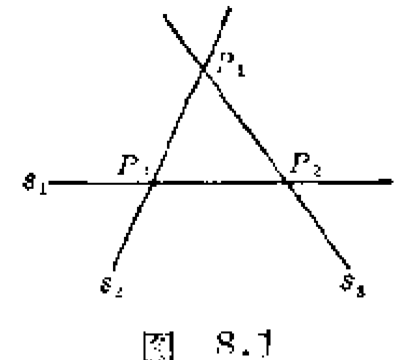


图 8.1

于是, 3000 条直线中产生一个三角形的至多 2 条, 从而三角形的个数

$$\geqslant\frac{2\times 3000-2}{3}=2000-\frac{2}{3},$$

即至少有 2000 个.

例 1 可作为 § 1 例 24 的补充.

格点, 也是组合几何中的一个重要内容, 本应单列一节叙述. 但笔者太疲乏了, 力不从心, 这里只能举一个例题说说. 闵嗣鹤先生曾写过一本《格点与面积》, 非常精彩, 建议读者读一读.

取两条相交直线作为坐标轴, 建立坐标系. 在这两条直线垂直时, 得到的是通常的直角坐标系; 否则, 得到的是斜坐标系.

在坐标系中, 纵横坐标都为整数的点称为格点(整点).

**例 2** 若绕坐标原点 $O$ 旋转 $\alpha$ 个弧度($0<\alpha<2\pi$)，格点仍变为格点，$\alpha$ 可取哪些值？这里的坐标系可以是直角坐标系，也可以是坐标轴夹角为 $\omega(0<\omega<\pi)$ 的斜坐标系.

**解** 设 $P$ 为与 $O$ 最近的格点，$P$ 旋转后成为 $P'$，$P'$ 旋转后成为 $P''$，……这些点都在 $\odot(O, OP)$ 上. 因为格点是离散的，在 $\odot(O, OP)$ 上只有有限多个格点，所以 $P, P', P'', \cdots$ 中必有互相重合的，即有正整数 $k$、$n$ 使

$$n\alpha=2k\pi,$$

其中 $n$、$k$ 互质(若 $(n, k)>1$，则将 $(n, k)$ 约去).

对于互质的整数 $n$、$k$，存在自然数 $x$、$y$ 使

$$xk-yn=1.$$

于是 $$x\alpha=\frac{xk}{n}\cdot 2\pi=\frac{yn+1}{n}\cdot 2\pi=y\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{n},$$

即绕 $O$ 旋转 $x$ 次，每次转过 $\alpha$ 相当于绕 $O$ 旋转 1 次，转过 $\frac{2\pi}{n}$. 因此，不妨设 $\alpha=\frac{2\pi}{n}$.

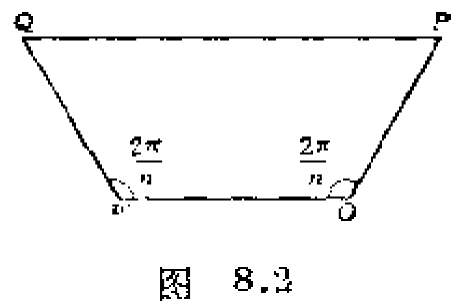



图 8.2

绕 $P'$ 旋转 $\alpha=\frac{2\pi}{n}$，$O$ 点变为 $Q$，$Q$ 也是格点.

如果 $Q$ 与 $P$ 重合，那么 $n=6$，$\alpha=\frac{\pi}{3}$.

如果 $Q$ 不与 $P$ 重合，那么由于 $P$ 的选择，$PQ\geqslant OP$. 从而 $n\leqslant 4$ (若 $n=5$，$PQ<OP$；若 $n>6$，$PP'<OP$. 均不可能). $n=4$ 时，$\alpha=\frac{\pi}{2}$；$n=3$ 时，$\alpha=\frac{2\pi}{3}$；$n=2$ 时，$\alpha=\pi$.

因此，在直角坐标系中，$\alpha$ 可取 $\pi$ 与 $\frac{\pi}{2}$. 在坐标轴的夹角 $\omega=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时，$\alpha$ 可取 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\pi$. 在 $\omega$ 为其他值时，$\alpha=$

$\pi$

通过例题,可以学到一些组合几何中常用的手法. 例如,考虑凸包,考虑在某一轴上的射影,通过计数论证,注意极端情形,运用不等式等等.

下面的例3需要利用射影.

**例3** 正方形纸片边长为 $a$,上面有一些墨水点. 每个墨水点的面积不大于1. 与正方形的任一边平行的每一条直线至多与1个墨水点相交. 证明墨水点的面积之和不大于 $a$.

**证明** 将墨水点垂直投影到正方形的边 $AB$ 上,得到一些互不重叠的线段,设它们的长度为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$($n$ 为墨水点的个数). 同样,设墨水点在边 $BC$ 上的投影为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

每个墨水点的面积

$$S_i \leqslant \sqrt{S_i} \leqslant \sqrt{x_i y_i} \leqslant \frac{x_i + y_i}{2}.$$

因此墨水点面积之和

$$\sum S_i \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum x_i + \sum y_i\right) \leqslant \frac{1}{2}(a+a) = a.$$

例3也运用了基本的不等式.

**例4** 平面上给出100个点,每三点不共线. 考察以上述点为顶点的所有三角形,证明其中锐角三角形至多占70%.

**证明** 从中任取五个点,考虑这五点的凸包. 这时有三种情况:

(i) 凸包为五边形 $ABCDE$.

因为五边形的内角和为 $3\times180°$, 所以五个内角中至少有两个钝角. 不失一般性,可设一个为 $\angle A$,另一个为 $\angle B$ 或 $\angle C$. 这时四边形 $ACDE$ 中至少还有一个内角非锐角. 因

此，这五个点中每三个构成的 $C_5^3=10$ 个三角形中至少有 3 个不是锐角三角形.

(ii) 凸包为四边形 $ABCD$，另一点 $E$ 在四边形内.

$EA$、$EB$、$EC$、$ED$ 之间的夹角至少有两个非锐角，再加上四边形 $ABCD$ 的一个非锐角的角，至少也有 3 个不是锐角三角形.

(iii) 凸包为 $\triangle ABC$，$D$、$E$ 在三角形内.

$\angle ADB$、$\angle BDC$、$\angle CDA$ 中至少有两个钝角，$\angle AEB$、$\angle BEC$、$\angle CEA$ 中也至少有两个钝角. 至少有 4 个钝角三角形.

100 个点中有 $C_{100}^5$ 个五点组，每五点中至少有 3 个不是锐角三角形，每个三角形至多属于 $C_{100-3}^{5-3}$ 个五点组，因此至少有 $\dfrac{3C_{100}^5}{C_{100-3}^{5-3}}$ 个三角形不是锐角三角形，占三角形总数的

$$\frac{3C_{100}^5}{C_{100-3}^{5-3}C_{100}^3}=\frac{3}{10}.$$

所以锐角三角形不多于 70%.

**例 5** 一个古老的矮人仪式需要十个矮人在夏至太阳升起时面向东方站立，并使得每五个人中有四个人站在一个圆上，问矮人最多的圆周上最少有几个人?

**解** 9 个矮人在同一圆上，1 个不在这个圆上，这种情况满足要求. 因此设矮人最多的圆上最少有 $l$ 个人，则 $l\leqslant 9$.

显然在 $l<10$ 时，必有 4 个矮人不在同一圆上，过其中每三个作一个圆，共得 4 个圆. 其他六个矮人中的每一个与这四个组成五人组，因而必在上述 4 个圆的某一个上，六个人中必有两个在同一圆上，所以 $l\geqslant 5$.

设圆 $C$ 上有 $l$ 个人，若 $l\leqslant 8$，则圆外至少有 2 个人 $m_1$、

$m_2$. 对圆 $C$ 上任三个人，其中必有两个与 $m_1$、$m_2$ 共圆. 设圆 $C$ 上 $m_3$、$m_4$ 与 $m_1$、$m_2$ 共圆，$m_5$、$m_6$ 与 $m_1$、$m_2$ 共圆. 对圆 $C$ 上的第五个人 $m_7$ 及 $m_3$、$m_5$，他们之中没有两个能与 $m_1$、$m_2$ 共圆. 矛盾!

因此 $l=9$.

**注** 本题曾作为英国与中国的竞赛题. 中国竞赛题中矮人改成鸟.

下面是一道越南的赛题:

**例 6 平面上给定有限多个圆，每两个外离或外切，并且每一个圆至多与其他六个圆相切. 每个不与六个圆相切的圆均已标上一个实数. 证明对其他圆至多有一种标法使得这些圆所标的数恰好等于与它相切的六个圆所标的数的算术平均值.**

**证明** 若有两种不同的标法，考虑它们的差——称之为差函数. 差函数在每个不与六个圆相切的圆上值为 0，至少在一个与六个圆相切的圆上值非 0. 不妨设这个值大于零（否则交换被减数与减数），并且差函数在圆 $C_0$ 处取得最大值 $k>0$. $k$ 等于差函数在与圆 $C_0$ 相切的六个圆上的值的平均值. 由于 $k$ 的最大性，在这些圆上差函数的值也必须为 $k$. 因而它们中的每一个均与六个圆相切（否则差函数的值为 0）.

如果 $\odot O$ 与 $\odot A$、$\odot B$ 等六个圆相切，而这六个圆又彼此外离或外切，那么这些圆的半径 $R_A$、$R_B$、…中必有一个小于或等于 $\odot O$ 的半径 $R$. 否则如图 8.3，$AB\geqslant R_A+R_B>R_A+R=OA$, $AB>OB$, $\angle AOB>60°$. 同样其他的五个以 $O$ 为顶点的角也都大于 $60°$，它们的和大于 $360°$，这是不可能的.

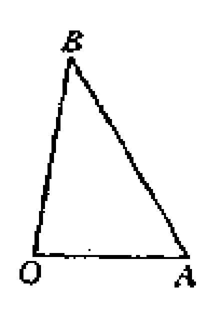


图 8.3

因此，与圆 $C_0$ 相切的最小圆 $C_1$ 的半径 $R_1 \leqslant$ 圆 $C_0$ 的半径 $R_0$. 用 $C_1$ 代替 $C_0$ 继续讨论，得到一串圆

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \cdots. \tag{1}$$

在上述过程中，如果最小圆不只一个，应当选取圆心离圆 $C_0$ 的圆心 $O$ 最远的那一个.

因为圆的总数有限，而(1)是无穷序列，所以必有圆重复出现. 设 $C_{n+t}=C_n$, 则 $C_n$, $C_{n+1}$, $\cdots$, $C_{n+t-1}$ 这 $t$ 个圆及与它们相切的圆都应当相等. 但对每个圆，六个与它相切的等圆中显然都有一个比它距 $O$ 更远. 因此 $C_n$, $C_{n+1}$, $\cdots$, $C_{n+t}$ 应一个比一个距 $O$ 更远，不可能有 $C_{n+t}=C_n$.

以上矛盾表明至多只有一种符合要求的标法.

例 7～例 9 是覆盖问题.

**例 7** 三个圆的半径分别为 $r_1$、$r_2$、$r_3$, 用它们能覆盖圆(盘)$O$, 问圆 $O$ 的半径最大是多少?

**解** 应分为两种情况:

(i) $r_1$、$r_2$、$r_3$ 可组成一个锐角三角形.

设这个锐角三角形的外接圆半径为 $r$, 则圆 $O$ 半径的最大值是 $2r$.

一方面，以 $2r_1$、$2r_2$、$2r_3$ 为边长的 $\triangle ABC$, 其外接圆半径是 $2r$. 分别以 $BC(=2r_1)$、$CA(=2r_2)$、$AB(=2r_3)$为直径作圆(图 8.4). 由于 $\overset{\frown}{BC}$(外接圆的弧)所对圆周角 $\angle A$ 是锐角，所以弓形 $BC$ 被以 $BC$ 为直径的圆覆盖. 同理，其他两个弓形分别被另两个圆覆盖.

作高 $AD$, 则 $\triangle ABC$ 被分成两个直角三角形. 它们分别被以 $AB$、$AC$ 为直径的圆覆盖.

因此，以 $2r_1$、$2r_2$、$2r_3$ 为直径的圆覆盖 $\triangle ABC$ 的外接圆，即半径为 $2r$ 的圆.

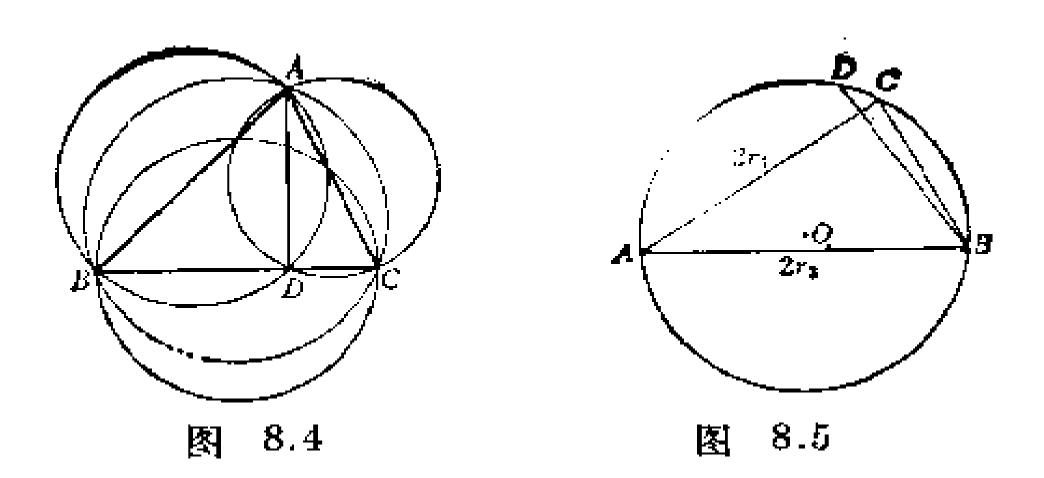



图 8.4　　图 8.5

另一方面，设圆 $O$ 的半径 $R>2r$. 以 $r_1$ 为半径的圆在这圆上覆盖的弧所对的弦 $\leqslant 2r_1$. 因此这弧所含度数小于图 8.4 中 $\angle BAC$ 的 2 倍. 同理其他二圆覆盖的弧所含度数分别小于 $\angle B$、$\angle C$ 的 2 倍. 因此三圆覆盖的弧所含度数之和 $<2(\angle BAC+\angle B+\angle C)=360°$. 即三个圆不能覆盖圆 $O$ 的圆周，当然更不能覆盖这圆盘.

(ii) $r_1$、$r_2$、$r_3$ 不能组成锐角三角形.

不妨设 $r_3\geqslant r_1$、$r_2$. 圆 $O$ 半径的最大值是 $r_3$.

一方面，以 $r_3$ 为半径的圆显然被这三个圆覆盖.

另一方面，设圆 $O$ 的半径 $R>r_3$. 以 $r_3$ 为半径的圆在圆 $O$ 上覆盖的弧所对的弦 $AB\leqslant 2r_3<2R$. 因此这弧所含度数小于 $180°$. 如果三个圆能覆盖圆 $O$，不妨设 $AB=2r_3$，另两个圆覆盖的弧所对弦 $AC=2r_2$，$BD=2r_1$. $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 所含度数之和大于 $180°$(图 8.5)，所以 $C$ 应当在 $\overset{\frown}{BD}$ 上. 从而 $AC+BD>AC+BC>AB$，$2r_1$、$2r_2$、$2r_3$ 可以组成三角形，而且 $\angle ACB<\dfrac{1}{2}\times 180°=90°$，$(2r_1)^2+(2r_2)^2>AC^2+BC^2>AB^2=(2r_3)^2$. 所以 $2r_1$、$2r_2$、$2r_3$ 组成锐角三角形，即 $r_1$、$r_2$、$r_3$ 组成锐角三角形. 矛盾！因此三个圆不能覆盖圆 $O$.

在圆(盘)的覆盖问题中，常常讨论圆周是否被覆盖？被覆

盖了多少？例 7 就是这样做的.

**例 8** 三个边长为 1 的正三角形可覆盖一个边长为 $a$ 的正三角形，求 $a$ 的最大值.

**解** $a$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

一方面，设边长为 $\frac{3}{2}$ 的正三角形 $ABC$ 中心为 $O$. 如图 8.6，过 $O$ 作三边的平行线，在各边上截得 $D$、$E$、$F$、$G$、$H$、$I$. 易知 $\triangle AIF$、$\triangle BEH$、$\triangle CDG$ 都是边长为 1 的正三角形，它们覆盖了 $\triangle ABC$.

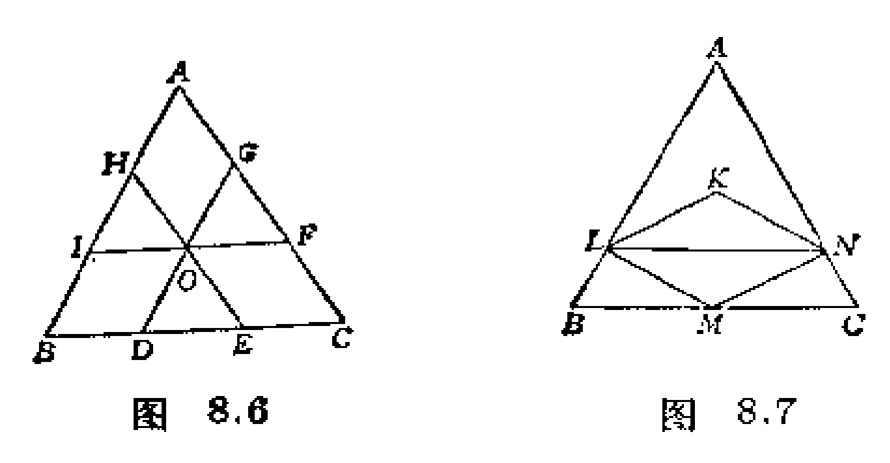



图 8.6　　图 8.7

另一方面，我们先证明覆盖一个锐角为 60°，边长为 $b$ 的菱形 $KLMN$，所需的正三角形边长至少为 $2b$. 事实上，将这正三角形的边向内平移，总可以使菱形的锐角顶点 $L$、$M$ 在正三角形的边上，一个钝角顶点例如 $M$ 也在三角形的边上（图 8.7）.

设 $\angle ALN$、$\angle ANL$ 中较小的为 $\angle ALN=\alpha$，则 $30°\leqslant\alpha\leqslant 90°$. 由正弦定理

$$AL=\frac{LN}{\sin 60°}\times\sin(\alpha+60°)$$

$$=\frac{2b\sin 60°}{\sin 60°}\times\sin(\alpha+60°),$$

$$BL=\frac{LM}{\sin 60^\circ}\times\sin(\alpha-30^\circ)$$
$$=\frac{b}{\sin 60^\circ}\times\sin(\alpha-30^\circ).$$

所以

$$AB=\frac{2b\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ}\times\sin(\alpha+60^\circ)$$
$$+\frac{b}{\sin 60^\circ}\times\sin(\alpha-30^\circ)$$
$$=\frac{b}{\sin 60^\circ}(\cos\alpha-\cos(120^\circ+\alpha)+\sin(\alpha-30^\circ))$$
$$=\frac{b}{\sin 60^\circ}(\cos\alpha+\sin(\alpha+30^\circ)+\sin(\alpha-30^\circ))$$
$$=\frac{b}{\sin 60^\circ}(\cos\alpha+2\sin\alpha\cos 30^\circ)$$
$$=\frac{2b}{\sin 60^\circ}\sin(\alpha+30^\circ)$$
$$\geqslant 2b$$

(因为 $30^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ$, $\sin(\alpha+30^\circ)\geqslant\sin 60^\circ$).

如果正三角形 $DEF$ 的边长 $a>\frac{3}{2}$, 那么覆盖它的每个边长为 1 的正三角形只能盖住一个顶点. 不妨设盖住 $D$ 的小正三角形也盖住 $\triangle DEF$ 的中心 $O$. 在 $DE$ 上取 $L$, $DF$ 上取 $N$, 使 $DL=DN=\frac{1}{3}a$(图 8.8), 则 $EL=FN=\frac{2}{3}a>1$. 由于小正三角形的边长 (即它的直径)是 1, 所以 $L$、$N$ 只能在盖住 $D$ 的小正三角形内. 于是这个正三角形盖住菱形 $DLON$. 根据上面所说, 它的边长 $=2\times\frac{1}{3}a>1$. 矛盾!

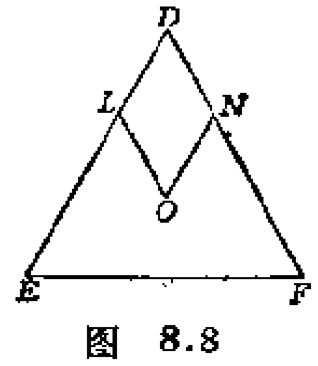


图 8.8

因此 $a$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

**例 9** $n$ 个圆 $\odot O_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 半径均为 1, 将它们"移近一些"产生 $n$ 个圆 $\odot O'_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 半径仍为 1, 并且

$$O'_iO'_j\leqslant O_iO_j \quad (1\leqslant i<j\leqslant n).$$

证明原来 $n$ 个圆覆盖的面积 $S$ 不小于后 $n$ 个圆覆盖的面积 $S'$ 的 $\frac{1}{9}$.

**证明** 令 $I\subseteq\{1, 2, \cdots, n\}$, 满足

$$|O_iO_j|\geqslant 2, \ i, \ j\in I.$$

并且 $I$ 已经最大, 即对任一 $k\notin I$, $I$ 中至少有一个 $i$, 使 $|O_iO_k|<2$(否则将 $k$ 加到 $I$ 中).

于是, 每一个 $O'_k$ 均至少与一个 $O'_i(i\in I)$ 的距离 $\leqslant 2$, 从而 $\odot(O'_k, 1)$完全在 $\odot(O'_i, 3)$中. 设 $\odot(O'_i, 3)(i\in I)$覆盖面积 $S''$, 则

$$S'\leqslant S''\leqslant\sum_{i\in I}\pi\times 3^2=3^2\sum_{i\in I}\pi\leqslant 9S.$$

最后一步是由于 $i\in I$ 的圆 $\odot O_i$ 无重叠部分.

因此

$$S\geqslant\frac{1}{9}S'. \tag{2}$$

从直观上看应有 $S\geqslant S'$. 但不知这一猜测是否正确, 甚至(2)中的 $\frac{1}{9}$ 目前还不能改成稍大的数, 太可怜了.

顺便介绍一个有关的问题.

**例 10** 在上例中, 若原来的 $n$ 个圆有公共点, 则后 $n$ 个圆也有公共点.

**证明** 设 $V$ 是原 $n$ 个圆的公共点. 如果 $V$ 与某个 $O_i$, 例如 $O_1$ 重合, 那么

$$O_i'O_1' \leqslant O_iO_1 = O_iV \leqslant 1,$$

所以 $O_1'$ 就是后 $n$ 个圆的公共点.

设 $V$ 与 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 均不相同. 考虑函数

$$f(M) = \max_i \frac{MO_i'}{VO_i}.$$

因为 $\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = +\infty$, 所以 $f(M)$必在某一点 $V'$ 取得最小值 $m$. 如果 $m \leqslant 1$, 那么 $V'O_i' \leqslant VO_i \leqslant 1$, $V'$ 即为所求公共点. 设 $m > 1$, 并且

$$\frac{V'O_i'}{VO_i}\begin{cases} = m, & 1 \leqslant i \leqslant k; \\ < m, & k < i \leqslant n. \end{cases}$$

$V'$ 一定属于 $O_1', O_2', \cdots, O_k'$ 的凸包. 否则, 有一条直线(凸包的支持直线)$l$ 将 $V'$ 与凸包分开. 当 $V'$ 沿 $l$ 的垂线向 $l$ 移近时, $V'$ 到 $O_i'(1 \leqslant i \leqslant k)$的距离均严格减少. 因此适当移动 $V'$ 可使 $\max\limits_i \dfrac{V'O_i'}{VO_i}$ 减少, 与最小性不符. 这同时也得出 $k \geqslant 2$(一点的凸包即该点自身).

为简便起见, 不妨设 $O_1, O_2, \cdots, O_k$ 在一张平面上, 原点为 $V$, 并且各点的位置向量(复数)$\overrightarrow{VO_i} = z_i$. $O_1', O_2', \cdots, O_k'$ 在另一张平面上, 原点为 $V'$, 并且各点的位置向量 $\overrightarrow{V'O_i'} = z_i'$. 由已知 $O_i'O_j' \leqslant O_iO_j$ 得内积

$$(z_j' - z_i', z_j' - z_i') \leqslant (z_j - z_i, z_j - z_i),$$

即

$$(z_j', z_j') + (z_i', z_i') - 2(z_i', z_j')$$
$$\leqslant (z_j, z_j) + (z_i, z_i) - 2(z_i, z_j).$$

又对 $1 \leqslant i \leqslant k$,

$$(z_i', z_i') = m^2(z_i, z_i) > (z_i, z_i), \tag{3}$$

所以对 $1 \leqslant i < j \leqslant k$,

$$(z_i', z_j') > (z_i, z_j). \tag{4}$$

因为 $V'$ 属于 $O_1', O_2', \cdots, O_k'$ 的凸包, 所以有

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i' = 0, \tag{5}$$

其中 $\lambda_i$ 为非负实数. 显然

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i', \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i'\right) = 0. \tag{6}$$

但另一方面, 由(3)及(4),

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i', \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i'\right) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j (z_i', z_j') \\ &> \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j (z_i, z_j) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i\right) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{7}$$

(6)、(7)矛盾. 因此必有 $m \leqslant 1$, 从而 $V'$ 为公共点.

本例中, 各圆的半径可改为互不相同, 证明不变.

关于"移近一些"的圆, 还有不少有趣的问题. 例如《覆盖》一书中证明了覆盖原来 $n$ 个圆的圆一定能覆盖移近了的 $n$ 个圆.

**例 11** 设平面上有 $n \geqslant 5$ 个红点, $m$ 个蓝点, 并且红点不全共线. 证明存在一个(顶点)同色的三角形, 它的内部不含有另一种颜色的点.

**证明** 考虑红点的凸包 $A$. 它是一个凸多边形, 顶点全是红点. 设它的内部有 $k$ 个红点, 则该凸包是 $n-k$ 边形(可能是退化的, 即允许有内角为 $\pi$). 将该凸包先用互不相交的对角线分为 $n-k-2$ 个三角形, 再从 $k$ 个红点中取一个点与所属三角形的顶点相连. 这样逐一进行, 将 $k$ 个红点全部用完便可将凸包剖分为若干红色三角形(顶点均红色的三角

形)，其个数 $t$ 满足

$$t\cdot\pi=(n-k-2)\pi+2k\pi. \tag{8}$$

所以不论分法如何，

$$t=n+k-2. \tag{9}$$

如果结论不成立，那么每个三角形内部至少有一个蓝点，从而 $A$ 内部的蓝点个数 $m_1\geqslant n+k-2$.

任一直线 $l$，必有一侧与 $l$ 上含有的红点个数之和 $\geqslant 3$（因为 $n\geqslant 5$），并且有 3 点不全在 $l$ 上．它们构成的红色三角形的内部有蓝点，这些蓝点不在 $l$ 上．因此 $m_1$ 个蓝点不全共线.

用这 $m_1$ 个蓝点的闭包 $B$ 代替 $A$，进行同样的讨论可得 $B$ 的内部红点的个数 $\geqslant m_1-2\geqslant n+k-4>k$．但 $B$ 的内部一定含于 $A$ 的内部，它至多有 $k$ 个红点．矛盾！

因此，必有一个同色三角形，它的内部不含另一种颜色的点.

组合几何中染色问题也非常之多，除§7 和上例外，下面介绍一个"便士(国外的硬币)问题".

**例 12** 桌上放着若干大小相同的圆纸片，互不重叠．证明可以用四种颜色，将每个纸片染上一种颜色，并且彼此相切的纸片颜色不同．四能否改为三？

**证明** 考虑各圆圆心所成集合的凸包．设 $O$ 是凸包的一个顶点，则与 $\odot O$ 相切的纸片至多三个（理由与例 6 类似）．因此可将 $\odot O$ 去掉，将其他纸片染好后，再将 $\odot O$ 染上颜色，不同于与它相切的（至多三个）圆.

照此进行，可将圆的个数逐步减少，直至只剩下四个圆．这时染色是显然的（喜欢用归纳法的人可将上面的推理改成"假定 $n-1$ 成立，那么 $n$ 成立"的形式）.

本例中的圆纸片，即使大小不同，结论仍然成立．因为由著名的四色定理立即可导出这一结论．但不用四色定理还无法证明它．事实上，有人猜测这一“便士问题”(1936 年 Wagner 提出）与四色定理等价．所以不用四色定理只能证明圆片大小相同的情况．

四不能改为三．例如图 8.9 中，每个正三角形的顶点代表一个圆的圆心，正三角形的边长是圆的直径．$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两相切，颜色分别为 1、2、3．若只有三种颜色，则 $\odot D$ 与 $\odot A$ 颜色相同，从而 $\odot E$ 与 $\odot D$、$\odot A$ 颜色相同．同理，$\odot F$ 与 $\odot A$ 颜色相同．将这一“蟹螯”形绕 $A$ 旋转可使 $EF$ 等于圆的直径（即 $\odot E$、$\odot F$ 相切）．而 $\odot E$、$\odot F$ 颜色相同，这表明三种颜色不够（这一反例与 § 7 例 5 相类似）．

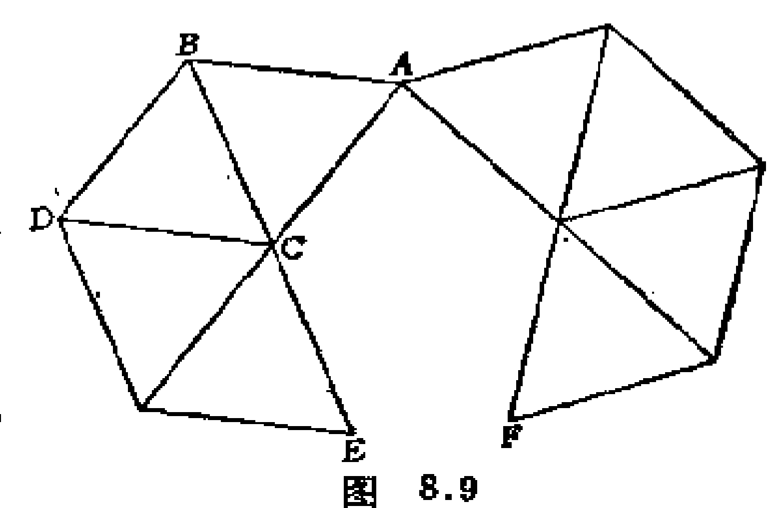
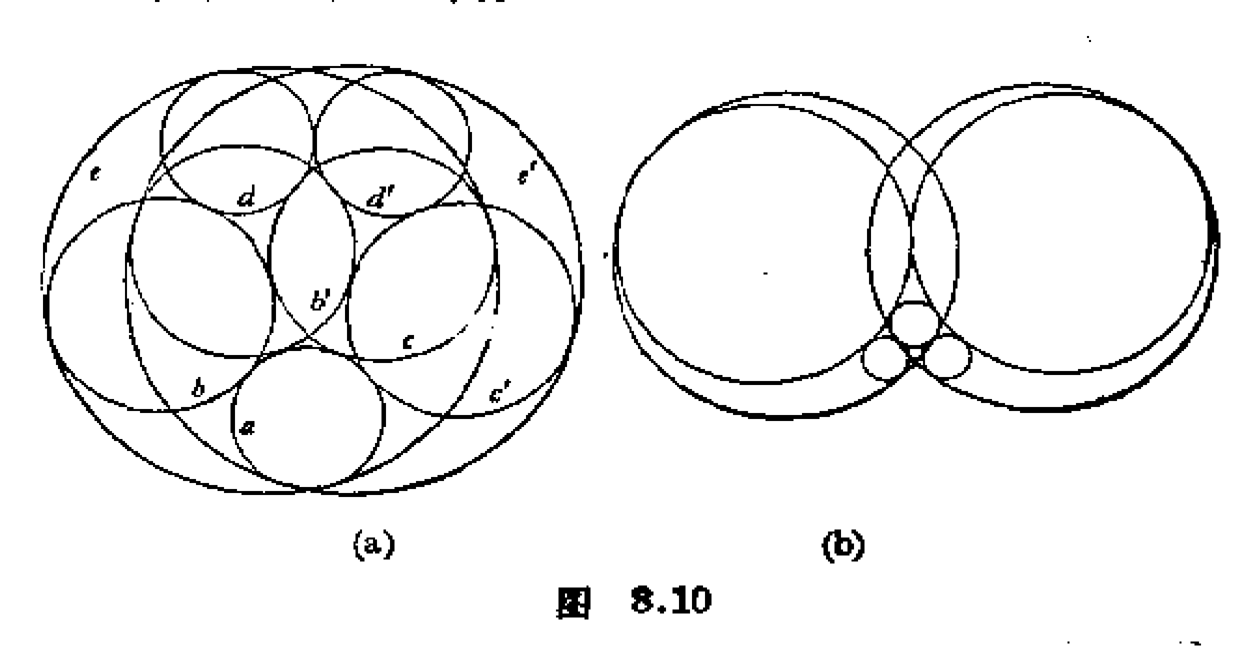


图 8.9

重叠的便士问题，即允许圆形纸片重叠(但没有公共切点)，大小不限，至少需要多少种染色才能保证相切的纸片颜色不同？这一问题是 1959 年 G. Ringer 首先提出的．即使它的特殊情况：圆片大小相同，至今仍未解决．1961 年，Hadwiger 曾证明 7 种颜色足够．对一般情况，图 8.10(a)显示 4 种颜色是不够的．在该图中，$a$、$b$、$c$、$e$ 四个圆两两相切，颜色各不相同．$d$、$b$、$c$、$e$ 也两两相切，如果只有四种颜色，那么 $a$、$d$ 同色．再将一个类似的结构(其中 $a$、$d'$ 同色)旋转，使 $d'$ 与 $d$ 相切，这就表明 4 色不够(证明思想与上面的“蟹螯”完全相同)．

图 8.10(a)中共有 9 个圆. 图 8.10(b)只用 8 个圆，不难验证这个图必须五色，才能保证相切的圆片颜色不同.

**注** 在没有公共切点时，两两相切的圆至多 4 个. 如果其中两个圆内切，则其余的圆在大圆内. 如果均为外切，有一个圆“夹在”三个圆之间.




(a) (b)

图 8.10

在图论中，常常考虑一个点与多少个点相邻(即相连)，也就是各点的次数. 在例 12 中，我们也是考虑一个圆至多与多少个相邻(相切)，但在圆大小不同时，这一方法失效. 下面的例 13 说明这一点.

**例 13** 对每个自然数 $n$，可作一批圆，每一个至少与 $n$ 个圆相切.

**证明** $n=1$ 时结论显然. 假设对于 $n$，已作出合乎要求的一批圆.

图 8.11

在这些圆的外面取一点 $O$，将所作的圆绕 $O$ 旋转 $n+1$ 次，产生 $n+1$ 批相同的圆，然后

以 $O$ 为心作同心圆与这 $n+1$ 批中的圆相切，如图 8.11，使得 $n+1$ 批中的每个圆均增加一个相切的圆．这样就得到一批圆，每个至少与 $n+1$ 个圆相切．

这种问题是典型的构造性问题．

例 14 与例 15 是“存在性问题”．这两道题需要用一点解析几何知识．

**例 14** $M$ 是平面上 $n(\geqslant 3)$ 个点组成的集合，其中任三点不共线．证明存在一个 $2n-5$ 个点组成的集合 $P$，使 $M$ 中任三点组成的三角形内部至少含有一个属于 $P$ 的点．

**证明** $M$ 中每两点相连，共得 $C_n^2$ 条直线．取一条与这 $C_n^2$ 条直线均不垂直的直线作为 $x$ 轴．设 $M$ 中的点 $Q_i$ 的坐标为 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，并且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$．

令 $d(Q_i, Q_jQ_k)$ 为 $Q_i$ 到直线 $Q_jQ_k$ 的距离，

$$d=\frac{1}{2}\min_{\substack{i,j,k\\ \text{两两不同}}} d(Q_i, Q_jQ_k),$$

$$P_1=\{(x_2, y_2-d), (x_2, y_2+d), (x_3, y_3-d), (x_3, y_3+d), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1}-d), (x_{n-1}, y_{n-1}+d)\}.$$

$P_1$ 是 $2n-4$ 元集．$M$ 中任三点所成三角形 $Q_iQ_jQ_k(i<j<k)$ 的内部必含有点 $(x_j, y_j-d)$ 或 $(x_j, y_j+d)$，即含有一个属于 $P_1$ 的点．

因为 $M$ 中每三点不共线，所以 $M$ 的凸包至少有三个顶点，其中有一个为 $Q_l$，$1<l<n$．点 $(x_l, y_l-d)$，$(x_l, y_l+d)$ 中必有一个不在 $M$ 的凸包中．从 $P_1$ 中去掉这个点，得到 $2n-5$ 元集 $P$，$M$ 中每三点所成三角形的内部至少含有一个属于 $P$ 的点．

平面上至少给出多少个一般位置（每三点不共线）的点，

便一定有一个以其中 $n$ 个点为顶点的凸 $n$ 边形?

记点的个数的最小值为 $f(n)$. 显然 $f(3)=3$(任意三个不共线的点构成三角形). 不难证明 $f(4)=5$. 可以证明 $f(5)=9$. 猜测

$$f(n)=2^{n-2}+1. \tag{10}$$

上式对 $n=3, 4, 5$ 均成立. 但 $n\geqslant 6$ 时, 只证明了

$$2^{n-2}+1\leqslant f(n)\leqslant C_{2n-4}^{n-2}+1. \tag{11}$$

下面我们证明(11)中的上界.

**例15** 证明从平面上 $C_{2n-4}^{n-2}+1$ 个一般位置的点中, 一定可以选出 $n$ 个点组成凸 $n$ 边形.

**证明** 对任给的 $t$ 个一般位置的点, 都可以选择 $x$ 轴, 使它不与这 $t$ 个点中每两点的连线垂直. 这样, $t$ 个点的横坐标互不相同. 连结其中两点 $(x_i, y_i)$, $(x_j, y_j)$ 的直线的斜率为

$$\phi(x_i, x_j)=\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}.$$

如果 $t$ 个点中有 $n$ 个点 $(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 满足

$$\phi(x_1, x_2)<\phi(x_2, x_3)<\cdots<\phi(x_{n-1}, x_n), \tag{12}$$

或

$$\phi(x_1, x_2)>\phi(x_2, x_3)>\cdots>\phi(x_{n-1}, x_n), \tag{13}$$

那么这 $n$ 个点显然构成凸 $n$ 边形.

称满足(12)的 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 为凸数列, 满足(13)的为凹数列.

对任意整数 $m$、$n\geqslant 3$, 令 $h(m, n)$ 为最小的整数, 使得任意 $h(m, n)+1$ 个一般位置的点的横坐标中必有一个长为 $m$ 的凸数列或一个长为 $n$ 的凹数列. 显然

$$h(n, 3)=h(3, n)=n-1 \tag{14}$$

(若 $n$ 个横坐标 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 不成凸数列, 则其中必有某连续三项 $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}$ 满足 $\phi(x_j, x_{j+1})<\phi(x_{j+1}, x_{j+2})$). 如果有

$$h(m, n)\leqslant h(m, n-1)+h(m-1, n), \tag{15}$$

那么利用简单的归纳法立即得出

$$h(m, n)\leqslant C_{m+n-5}^{m-2}+C_{m+n-5}^{m-3}=C_{m+n-4}^{m-2}, \tag{16}$$

从而
$$h(n, n)\leqslant C_{2n-4}^{n-2}.$$

因此 $t=C_{2n-4}^{n-2}+1$ 个一般位置的点的横坐标中必有一个长为 $n$ 的凸数列或凹数列, 从而这 $n$ 个点组成凸 $n$ 边形.

剩下的事是证明(15). 假设(15)不成立.

对任意的 $s=h(m, n-1)+h(m-1, n)+1$ 个实数

$$x_1<x_2<\cdots<x_s,$$

前 $p=h(m, n-1)+1$ 个中可得出一个长为 $n-1$ 的凹数列. 设它的最后一项是 $x_{i_1}$. 将 $x_{i_1}$ 去掉, 补入 $x_{p+1}$, 这样的 $p$ 个数中又可得出一个长为 $n-1$ 的凹数列. 设它的最后一项是 $x_{i_2}$. 将 $x_{i_2}$ 去掉, 补入 $x_{p+2}$, 再得出一个长为 $n-1$ 的凹数列. 如此继续下去, 可以得出 $q=h(m-1, n)+1$ 个长为 $n-1$ 的凹数列. 它们的最后一项是 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_q}$. 从这 $q$ 个数中可以得出一个长为 $m-1$ 的凸数列. 为不使记号繁复, 不妨设它就是

$$x_{i_1}<x_{i_2}<\cdots<x_{i_q}.$$

上面已说过 $x_{i_1}$ 是一个长为 $n-1$ 的凹数列的最后一项, 设这个数列中 $x_{i_0}$ 是 $x_{i_1}$ 的前一项. 若

$$\phi(x_{i_0}, x_{i_1})<\phi(x_{i_1}, x_{i_2}), \tag{17}$$

则 $x_{i_0}<x_{i_1}<\cdots<x_{i_q}$ 是一个长为 $m$ 的凸数列. 若(17)不成立, 则将 $x_{i_2}$ 加到 $x_{i_1}$ 所在的凹数列中, 得到一个长为 $n$ 的凹数列. 因此(15)必定成立.

**注** 可以证明(15)是等式.

下面的例 16、17 属于 Heilbronn 问题.

**例 16** 证明在单位面积的凸形内任取五个点，则以这五点为顶点所构成的十个三角形中至少有一个三角形的面积不超过 $\dfrac{2}{5+\sqrt{5}}$，并且这个常数是最佳的.

**证明** 若这五点的凸包为三角形或四边形，则经过剖分产生五或四个三角形，因此至少有一个三角形的面积

$$\leqslant \frac{1}{4} < \frac{2}{5+\sqrt{5}}.$$

若这五点的凸包为五边形 $ABCDE$(图 8.12)，如图连结对角线. 不妨设

$$S_{\triangle CBE} \geqslant S_{\triangle DBE}. \tag{18}$$

在 $\dfrac{AI}{AC}$、$\dfrac{CJ}{AC}$、$\dfrac{BJ}{BD}$ 中至少有一个 $\geqslant k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. 否则，

$$\frac{S_{\triangle BDI}}{S_{\triangle BIJ}}=\frac{BD}{BJ}>\frac{1}{k}, \tag{19}$$

$$\frac{S_{\triangle BIJ}}{S_{\triangle BCJ}}=\frac{IJ}{CJ}>\frac{1-2k}{k}, \tag{20}$$

$$\frac{S_{\triangle BIJ}}{S_{\triangle BCI}}=\frac{S_{\triangle BIJ}}{S_{\triangle BIJ}+S_{\triangle BCJ}}>\frac{1-2k}{1-k}. \tag{21}$$

将(19)、(21)二式相乘得

$$\frac{S_{\triangle BDI}}{S_{\triangle BCI}}>\frac{1-2k}{k(1-k)}=1, \tag{22}$$

即 $S_{\triangle BDI}>S_{\triangle BCI}$，从而 $S_{\triangle DBE}>S_{\triangle CBE}$，与(18)矛盾. 因此，不妨设 $\dfrac{AI}{AC}\geqslant k$.

令 $\min(S_{\triangle EAB},\ S_{\triangle ABC},\ S_{\triangle BCD},\ S_{\triangle CDE},\ S_{\triangle DEA})=\Delta$，

则 $\quad 1\geqslant S_{ABCDE}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ACD}\geqslant 2\Delta+\dfrac{S_{\triangle CDI}}{1-k}$

$$\geqslant 2\Delta+\frac{1}{1-k}\min(S_{\triangle BCD}, S_{\triangle CDE})$$

$$\geqslant\left(2+\frac{1}{1-k}\right)\Delta=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\Delta.$$

因此

$$\Delta\leqslant\frac{2}{5+\sqrt{5}}. \qquad (23)$$

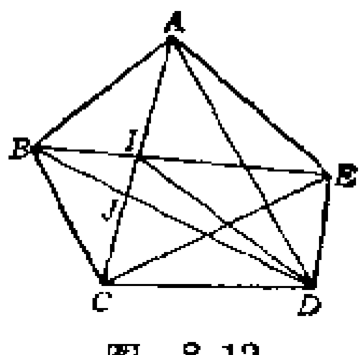


图 8.12

若凸形是正五边形，而所取五点即五个顶点，则(23)中等号成立，因此 $\frac{2}{5+\sqrt{5}}$ 是最佳常数.

例 16 是 Heilbronn 问题的特殊情况. 一般地，设 $M$ 为单位面积的凸形，在 $M$ 内任取 $n$ 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，以这些点为顶点的 $k$ 边形的最小面积记为 $\Delta_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 对于一切 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，$\Delta_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的最大值记为 $g_k(n)$. 确定或估计 $g_k(n)$的值，称为 Heilbronn 问题.

例 16 表明对凸形 $M$，$g_3(5)=\frac{2}{5+\sqrt{5}}$.

Heilbronn 问题有各种变体. 例如限定 $M$ 为单位圆，这时有如下结论.

**例 17** 证明对单位圆内的 $n$ 个点，它们中任三点所成三角形(包括退化情况)的面积的最小值$<\frac{C_1}{n}$，$C_1$ 为一正的常数. 同时，有一种取点的方法，使上述最小值$>\frac{C_2}{n^2}$，$C_2$ 为正的常数. 采用上面的记号，即

$$\frac{C_2}{n^2}<g_3(n)<\frac{C_1}{n}. \qquad (24)$$

**证明** 将单位圆等分为$\left[\frac{n-1}{2}\right]$份，其中必有一份有三个

已知点，它们所成三角形的面积$\leqslant \dfrac{1}{\left[\dfrac{n-1}{2}\right]}<\dfrac{C_1}{n}$.

另一方面，先考虑单位边长的正方形，不妨设它是正方形

$$I=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

对任一自然数 $n$，可取第 $k$ 个质数 $p_k\geqslant n>p_{k-1}$. 令

$$x_j=\frac{j}{p_k},\ y_j=\frac{1}{p_k}\left(j^2-p_k\left[\frac{j^2}{p_k}\right]\right),\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ p_k-1.$$

$p_k$ 个点 $P_j(x_j, y_j)(j=0,\ 1,\ \cdots,\ p_k-1)$都在正方形 $I$ 内，并且它们中任三点 $P_\alpha$、$P_\beta$、$P_\gamma$ 所成三角形面积的 $2p_k^2$ 倍（不计正负）为

$$p_k^2\cdot\begin{vmatrix}1 & x_\alpha & y_\alpha\\ 1 & x_\beta & y_\beta\\ 1 & x_\gamma & y_\gamma\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha^2-p_k\left[\dfrac{\alpha^2}{p_k}\right]\\ 1 & \beta & \beta^2-p_k\left[\dfrac{\beta^2}{p_k}\right]\\ 1 & \gamma & \gamma^2-p_k\left[\dfrac{\gamma^2}{p_k}\right]\end{vmatrix}$$

$$\equiv\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 1 & \beta & \beta^2\\ 1 & \gamma & \gamma^2\end{vmatrix}\pmod{p_k}$$

$$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\not\equiv 0\pmod{p_k}.$$

因此，面积的 $2p_k^2$ 倍是一非零整数．从而每三点所成三角形的面积$\geqslant\dfrac{1}{2p_k^2}$.

在数论中熟知 $p_k<2n$，所以 $\dfrac{1}{2p_k^2}\geqslant\dfrac{1}{8n^2}$. 即可在单位正

方形内取 $n$ 个点，每三点所成三角形的面积 $\geqslant \frac{1}{8n^2}$.

在单位圆内有一个边长为 $\sqrt{2}$ 的内接正方形，因而根据上面的结论，可取 $n$ 个点，每三点所成三角形的面积 $\geqslant \frac{(\sqrt{2})^2}{8n^2} = \frac{1}{2n^2}$. 这表明(24)的左端成立.

注 $j^2 - p\left[\frac{j^2}{p}\right]$ 就是 $j^2 \bmod p$ 所得的非负剩余.

(24)的上界被认为是平凡的. 后来著名数学家 K. Roth 将它改为 $\frac{1}{n(\log\log n)^{\frac{1}{2}}}$，这是第一个不平凡的上界. 接着，另一位著名数学家 W. Schmidt 改进为 $\frac{1}{n(\log n)^{\frac{1}{2}}}$，Roth 又改进为 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{10}}}$. Komlos 等打断上述两位的竞争，在 1982 年得出更精确的上界 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{7}}}$. Heilbronn 曾猜测上界的阶为 $\frac{1}{n^2}$，即(24)的下界是最佳的. 但 Komlos 等的文章指出这一猜测是不正确的，下界可改进为 $\frac{c\log n}{n^2}$. 他们猜测这也是上界的阶，因而是最佳的.

凸形 $M$ 也常常限定为单位正方形(边长为 1 的正方形).

1969 年北京市数学竞赛(这是我国早期由华罗庚教授等老一辈数学家亲自参加组织的竞赛)就有这样一道题:

"在单位正方形中任给 9 点. 证明必有三点所成三角形的面积 $< \frac{1}{8}$".

这题只需要用例 17 的平凡上界 $\frac{c}{n}$ 的估计方法，将正方形用平行于一边的直线等分为 4 个矩形. 其中必有一个矩形至少含有三个已知点. 这三点所成面积 $<$ 矩形面积的

$\frac{1}{2}$等于$\frac{1}{8}$.

9个点的问题比较容易. 其实9可以改进为6,这就相当困难了. 这时$\frac{1}{8}$是最佳的,即采用上面的记号,对于正方形有

$$g_8(6)=\frac{1}{8}. \tag{25}$$

1972年, M. Goldberg曾断言$g_8(5)=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $g_8(7)=0.0794\cdots$. 但1992年杨路,张景中,曾振柄指出上述断言是错误的. 他们证明了

$$g_8(5)=\frac{\sqrt{3}}{9}, \tag{26}$$

$$g_8(7)\geqslant\frac{1}{12}=0.0833\cdots. \tag{27}$$

图8.13是使最小三角形的面积为$\frac{1}{8}$的两种情况. 图8.14是最小三角形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{9}$的情况.

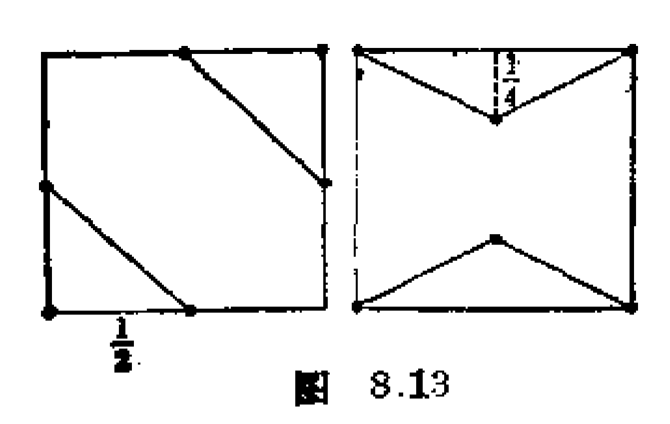
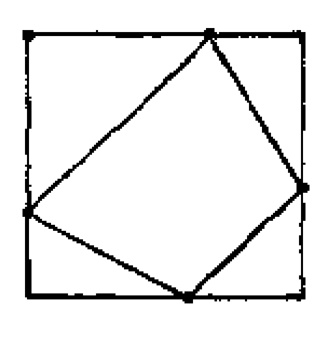


图 8.13


图 8.14

对于单位正方形,显然有$g_8(3)=g_8(4)=\frac{1}{2}$. 因此前四个Heilbronn数(即$g_8(n)$)均已确定.

在 $k=2$ 时，当然讲不上三角形的面积，这时可考虑每两点连线(指线段)的长度. 问题即成为最大长度与最小长度的比，这在§6例6中已讨论过.

在我国，很多人也将这一问题称为 Heilbronn 问题，看来有点以讹传讹，其实它与 Heilbronn 并无关系.

例18与例21都是分类问题，后者比较复杂.

**例 18** 平面上 $n$ 个点，每三点不共线. 不含这些点的两条直线，如果可以在平面上移动，由一个变为另一个而不经过任一个已给的点，就称为等价的. 问有多少互不等价的(不过任一已知点)直线?

**解** 设 $O$ 为这 $n$ 点中的一点. 将不过 $O$ 的直线标上方向，使得人沿这一方向前进时，$O$ 在左侧.

若直线 $l$ 不过已知点，则在它(根据 $O$ 点)定向后，其余的 $n-1$ 个已知点可以分为两个集，一个全在 $l$ 左侧，记为 $L$，另一个在 $l$ 右侧，记为 $R$. 当 $l$ 在平面上移动而不经过任一已知点时，$L$(同样 $R$)不变.

两条直线 $l_1$、$l_2$ 等价时，它们的"左派集团"$L_1=L_2$(当然也有 $R_1=R_2$). 反之，当 $L_1=L_2$ 时，$l_1$ 与 $l_2$ 等价.

现在作一个"配极对应"：对任一点 $P$，在射线 $OP$ 上取一点 $P'$，使

$$OP\times OP'=1, \tag{28}$$

过 $P'$ 作直线 $l(P)\perp OP$. 称

$$P\to l(P) \tag{29}$$

为配极对应，$l(P)$ 称为点 $P$ 的极线，点 $P$ 称为直线 $l(P)$ 的极点(这些在§1例10后面已经说过).

配极对应将点 $P$ 变为直线 $l(P)$. 同时，也将直线变为点：

过 $O$ 作直线 $l$ 的垂线，设垂足为 $P'$. 在射线 $OP'$ 上取 $P$ 满足(28)，则 $P$ 是 $l$ 的极点，令 $P$ 与 $l$ 对应.

显然除点 $P$ 及过 $P$ 的直线外，配极对应建立了平面上点与直线的一一对应.

容易证明 $P$ 的极线 $l(P)$ 过点 $Q$ 时，$Q$ 的极线 $l(Q)$ 也过点 $P$. 实际上，如图 8.15，$OP\times OP'=OQ\times OQ'=1$，所以 $P$、$P'$、$Q$、$Q'$ 四点共圆，$\angle OQ'P=\angle OP'Q=90°$，从而 $Q$ 的极线即直线 $Q'P$.

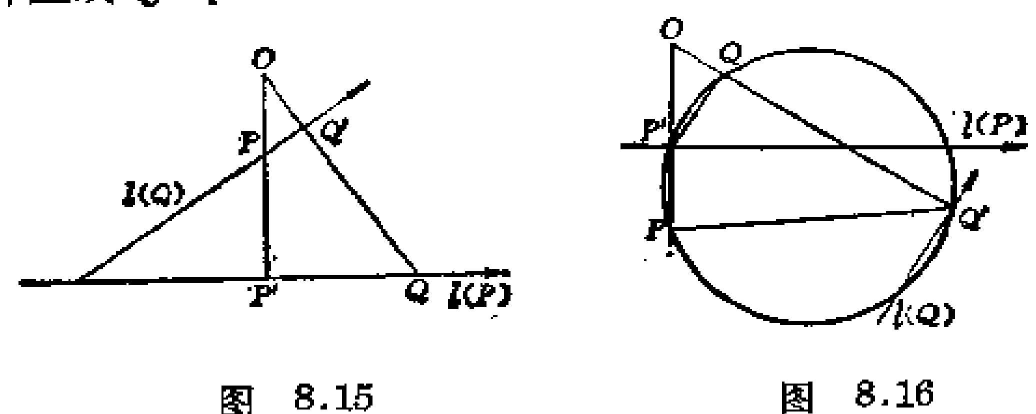



图 8.15　　　　图 8.16

并且，$Q$ 属于 $l(P)$ 的"左派集团"时，$P$ 属于 $l(Q)$ 的"左派集团"(如图 8.16，$P'$、$P$、$Q'$、$Q$ 共圆，$\angle OQ'P=\angle QP'O<90°$，所以 $P$ 属于 $l(Q)$ 的"左派集团").

除 $O$ 外的 $n-1$ 个已知点经配极对应变为 $n-1$ 条直线，由 §1 例 3，它们将平面分为 $\frac{n^2-n+2}{2}$ 个区域.

不过已知点的直线 $l$ 变为点 $P$. 若已知点 $S$ 在 $l$ 的左(右)侧，那么 $P$ 在 $l(S)$ 的左(右)侧. 因此，若直线 $l_1$、$l_2$ 等价，而已知点 $S$ 在它们左(右)侧，则 $l_1$、$l_2$ 的对应点 $P_1$、$P_2$ 同在 $l(S)$ 的左(右)侧. 这表明当且仅当 $P_1$、$P_2$ 在同一区域时，对应的直线 $l_1=l(P_1)$ 与 $l_2=l(P_2)$ 等价.

因为区域有 $\frac{n^2-n+2}{2}$ 个，所以不等价的直线共

$\frac{n^2-n+2}{2}$ 条.

下面是一个立体几何中的问题，在例 20 中需要利用，而且本身也是很有趣的.

**例 19** 一凸多面体(或球面上的地图)，每个面至少有三条边，如果将每条棱标上+或−号(染上红或蓝色)，那么每个顶点处的变号数不能都大于 3.

这里的变号数意义如下：顶点 $A$ 发出的棱依顺时针方向记为 $AB_1$, $AB_2$, …, $AB_n$，若 $AB_i$ 与 $AB_{i+1}$ 一正一负，便称为一个变号($1\leqslant i\leqslant n$).

**证明** 设多面体的顶点共 $v$ 个，变号数的总和为 $N$，每个顶点处的变号数都大于 3，那么

$$N\geqslant 4v. \tag{30}$$

另一方面，每一顶点 $A$ 处的任一次变号 $AB_i$ 与 $AB_{i+1}$，可看成在面 $B_iAB_{i+1}$ 上，多边形 $B_iAB_{i+1}\cdots$ 的一次变号. 因此 $N$ 也等于各个面上变号数的总和.

设多面体的面中，$i$ 边形的个数为 $f_i(i=3, 4, \cdots)$. 显然 $i$ 边形的变号数至多 $i$ 个，而且变号数一定是偶数(从一个标+号的边出发经过若干次变号又回到这一边，变号数当然是偶数)，所以

$$N\leqslant 2f_3+4f_4+4f_5+6f_6+6f_7+\cdots. \tag{31}$$

利用多面体的欧拉定理($e$、$f$ 分别为棱数与面数)

$$v-e+f=2, \tag{32}$$

及

$$2e=3f_3+4f_4+\cdots. \tag{33}$$

我们得到

$$4v-8=4e-4f=2(3f_3+4f_4+\cdots)-4(f_3+f_4+\cdots)$$
$$=2f_3+(4f_4+6f_5+\cdots+(2i-4)f_i+\cdots)\geqslant N\geqslant 4v.$$

矛盾！

例 19 称为 Cauchy 引理，即使有一些棱末标符号（在计算变号个数时可以略去不计），结论仍然成立．Cauchy 用这一引理（允许不标号的一般形式）证明了关于凸多面体的 Cauchy 定理：

各面对应相等，并且同样安置的两个凸多面体，必为全等或对称．

换句话说，凸多面体若要变形为与它不全等的多面体必须破坏它的面（至少将一个面变成与它不全等的面）．

下面的例 20 与 Sylvester 问题有关．

**例 20** 将平面上 $n\geqslant3$ 个点染成红色或蓝色，这些点不全共线，证明必有一条同色直线，即它上面的有色点都是一种颜色，并且至少通过两个有色点．

**证明** 考虑球面上 $n$ 个大圆，每个圆染成红色或蓝色，并且这些大圆不通过同一点（因此球面上每个区域至少有三条边）．

根据上例，在大圆的交点中，必有一个点，通过这点的大圆都是同一种颜色（若每点均有两种颜色的大圆通过，那么每点的变号数$\geqslant4$）．

任取一个点为北极，将大圆投射到过南极的切面上，便得到：

在实射影平面上，如果 $n\geqslant3$ 条直线中，每条直线染上红色或蓝色，那么必有一个交点，通过这点的直线是同一种颜色的．

这是例 20 的对偶命题，因此例 20 亦成立（比如你可以作一个配极变换，使点与线互换）．

与例 18、19、20 不同，例 21 是完全“初等的”，内容不涉及

高中数学之外，但却不轻松.

**例 21** 在 $\triangle ABC$ 中，作最大边的中线 $AD$. 在所分成的两个三角形（$\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$）中，再各作最大边的中线. 这样继续下去. 证明所得的无穷多个三角形可以分成有限多类，同一类中的三角形彼此相似. 并证明每个三角形的角都不小于 $\frac{1}{2}\min(\angle A, \angle B, \angle C)$.

**证明** 设 $BC=1$, $AB=u$, $AC=v$, $v<u<1$. 又设 $BC$ 边上的高为 $h$. 以 $B$ 为心，1 为半径作圆，交 $BC$ 的垂直平分线于 $E$，则 $B$ 在图 8.17 的"半弓形"内.

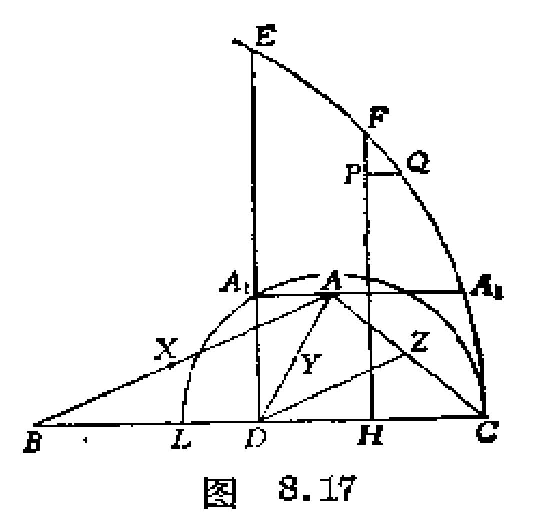


图 8.17

对每次作中线得出的新三角形，我们将它放大，使最长边为 1，然后移动使得最长边与 $BC$ 重合. 这时第三个顶点也和点 $A$ 一样，落在上述半弓形内，称它为该三角形的*表示*. 图 8.17 中的 $A$ 就是 $\triangle ABC$ 的表示.

设 $AD=m$. 称 $\triangle ADC$ 为*右三角形*，$\triangle ABD$ 为*左三角形*. 先看右三角形，分三种情况讨论：

(i) $DC$ 为最大边，即 $\frac{1}{2}\geqslant m$, $\frac{1}{2}\geqslant v$.

这时 $\triangle ADC$ 的最大边上的高（即它的最小高）仍为 $h$. $\triangle ADC$ 的表示 $A'$ 到 $BC$ 的距离 $h'=2h$（$\triangle ADC$ 的边及高均放大至 2 倍）.

(ii) $AD$ 为最大边，即 $m\geqslant\frac{1}{2}$, $m\geqslant v$.

这时最小高为 $\dfrac{\frac{1}{2}h}{m}$，表示 $A'$ 到 $BC$ 的距离

$$h'=\frac{\frac{1}{2}h}{m}\times\frac{1}{m}=\frac{h}{2m^2} \tag{34}$$

($AD=m$ 放大为 1, 即扩大 $\frac{1}{m}$ 倍). 过 $A$ 作 $BC$ 的平行线交 $\overset{\frown}{EC}$ 于 $A_1$, 则

$$m^2=AD^2\leqslant A_1D^2=h^2+\left(\sqrt{1-h^2}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}-\sqrt{1-h^2},$$

所以

$$h'=\frac{h}{\frac{5}{2}-2\sqrt{1-h^2}}=q_1(h)\cdot h, \tag{35}$$

其中 $q_1(h)=\left(\frac{5}{2}-2\sqrt{1-h^2}\right)^{-1}$. 在 $h<\frac{\sqrt{7}}{4}$ 时, $q_1(h)>1$.

作 $DC$ 的垂直平分线 $HF$, 交 $\overset{\frown}{EC}$ 于 $F$, 显然 $m\geqslant u$ 时, $A$ 必在半弓形 $CFH$ 内. 易知 $HF=\frac{\sqrt{7}}{4}$, 所以只要 $A$ 不与 $F$ 重合, 恒有 $q_1(h)>1$. 并且由于 $q_1(h)$ 是 $h$ 的减函数, 如果作一条与 $BC$ 平行的直线交 $FH$ 于 $P$, 交 $\overset{\frown}{FC}$ 于 $Q$, 那么当 $A$ 在 $PQ$ 下方时, 恒有 $q_1(h)\geqslant q_1(h_0)>1$, 这里 $h_0=PH$.

(iii) $AC$ 为最大边, 即 $v\geqslant m$, $v\geqslant\frac{1}{2}$.

设 $X$、$Y$、$Z$ 分别为 $AB$、$AD$、$AC$ 的中点. $\triangle ZDC$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 不必讨论. 根据 $\triangle ADZ$ 中的最大边是谁, 又分为两种情况:

1° $DZ$ 最大, 即 $u\geqslant 2m$.

在 $u=2m$ 时, $AD=AX$, $\angle XAD$ 的平分线垂直于 $DX$, 即垂直于 $AC$. 设这时角平分线交 $BC$ 于 $L$, 则以 $LC$ 为直径的半圆是 $BD$ 的阿氏圆, $A$ 在这半圆上, 并且 $\frac{BL}{LD}=\frac{BC}{DC}$

$=\frac{AB}{AD}=2$. 所以 $BL=\frac{2}{3}BD=\frac{1}{3}$. 在 $u>2m$ 时，$\frac{AD}{AB}=\frac{m}{u}<\frac{1}{2}$，$A$ 应在以 $LC$ 为直径的半圆内.

$\triangle ADZ$ 的最小高为 $\frac{\frac{1}{4}h}{u/2}$，所以它的表示 $A'$ 到 $BC$ 的距离

$$h'=\frac{\frac{1}{4}h}{u/2}\times\frac{1}{u/2}=\frac{h}{u^2}\geqslant\frac{h}{A_2B^2},$$

而

$$A_2B^2=h^2+\left(\frac{2}{3}+\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-h^2}\right)^2$$

$$=\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{9}-h^2},$$

所以

$$h'=q_2(h)\cdot h, \tag{36}$$

其中 $q_2(h)=\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{9}-h^2}\right)^{-1}>1$，是 $h$ 的增函数.

2° $AD$ 最大，即 $m>\frac{u}{2}\left(\geqslant\frac{v}{2}\right)$.

这时 $\triangle AYZ\backsim\triangle ADC$，$\triangle DZY\backsim\triangle ABD$，无需再进行讨论.

再看左三角形 $ABD$. 这时最大边一定是 $AB$，只有类似于情况(iii)中的两种子情况可能发生，即

1° $A$ 在以 $LC$ 为直径的半圆内，新表示 $A'$ 到 $BC$ 的距离 $h'$ 满足(36).

2° $A$ 在上述半圆外，不产生新的表示.

综上所述，只要 $A$ 不落在曲边三角形 $FPQ$ 内，那么或者

不产生新的表示，或者产生的新表示到 $BC$ 的距离满足

$$h'\geqslant qh,$$

其中 $q$ 是一个大于 1 的常数．这样继续下去，

$$h^{(n)}\geqslant qh^{(n-1)}\geqslant\cdots\geqslant q^n h.$$

由于 $\{h^{(n)}\}$ 有界，所以只能产生有限多个不同的表示．

如果 $A$ 落在曲边三角形 $FPQ$ 内，并且 $PQ$ 足够接近 $F$，那么右三角形(左三角形不需考虑)中 $AD$ 最大，$DC$ 最小(图 8.18)．

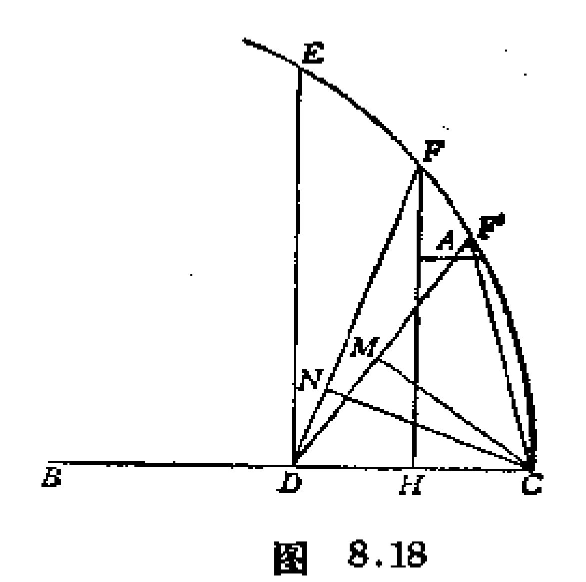



图 8.18

设 $AD$ 边上的高为 $CM$，延长 $BA$ 交 $\widehat{QF}$ 于 $F'$，那么 $\frac{AM}{MD}\leqslant\frac{F'M}{MD}$．在 $F'$ 沿 $\widehat{QF}$ 趋于 $F$ 时，$DF'$ 增加(设 $F'$ 在 $BC$ 上的射影到 $B$ 的距离为 $x$，则 $DF'^2=(x-\frac{1}{2})^2+(1-x^2)=1+\frac{1}{4}-x$，在 $x$ 减少时，$DF'$ 增加)．而 $\angle DCM$ 减少，$DM$ 减少．所以设 $C$ 在 $DF$ 上的射影为 $N$，则

$$\frac{AM}{MD}\leqslant\frac{FN}{ND}.$$

不难算出 $\frac{FN}{ND}=3$，于是

$$\frac{AM}{MD}\leqslant 3,$$

等号仅在 $A$ 与 $F$ 重合时成立．这表明在 $A$ 不为 $F$ 时，$\triangle ADC$ 的表示在 $HF$ 的左边 $\left(\frac{BH}{HC}=3\right)$，从而对下一次得出的表示，

$$h''\geqslant qh'\geqslant qh,$$

因此上面的论证仍然有效. 在 $A$ 为 $F$ 时, $\triangle DFC\backsim\triangle FBC$, 表示仍为 $F$.

至此, 我们已经证明只有有限多个不同的表示, 即前一半的结论成立.

现在证后一部分. 因为新的表示, 均有 $h'\geqslant h$, 所以 $A'$ 在 $AA_1$ 之上, 从而 $\angle A'BC\geqslant\angle A_1BC$. 设 $AA'$ 交 $DE$ 于 $A_2$, 则 $A_2B>BD=\frac{1}{2}=DC>A_2A_1$, 所以 $\angle A_2BA_1<\angle A_2A_1B=\angle A_1BC$, $\angle A'BC\geqslant\angle A_1BC>\frac{1}{2}(\angle A_1BC+\angle A_2BA_1)=\frac{1}{2}\angle A_2BC\geqslant\frac{1}{2}\angle ABC$.

# §9 研究问题

"数学的研究工作亦然，必须勤做，必须多和'高手'下（换言之，把数学大家的结果试与改进），必须多揣摩成局（指已有的解决有名问题的证明）. 经此锻炼自然本领日进."

——华罗庚《数论导引》

本节介绍的问题均是已经解决了的. 除极个别的外，在本书中找不到解答或直接的提示. 因为本书的篇幅已经不小，没有必要再扩大容量. 同时，罗列这些问题乃是为了给需要的读者一个砥砺的机会，所以解答就不在书中出现了.

有人说："数学竞赛的很多问题，对大人来说，不是好的问题，因为一个下午就能够解决了."那么，按这个标准，本节的问题或许要好一些. 至少不是所有的题都能在一个下午解决.

当然，如果解决不了，也可以去查找文献. 学习查找文献是从事研究工作的一项基本训练.

**1**. 在三维空间中，任给 $n$ 个不在同一平面的点，那么过三个已知点的平面中，必有一个平面，属于它的已知点除去一个外，全在同一条直线上.

2. 证明对§1例20中的$n$条直线$l\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, $n=0, 1, \cdots, n-1$, 有$f_3=\frac{n(n-3)-2s}{3}+6$, $f_4=n-6+s$, $f_j=0(j\geqslant5)$. 其中

$$s=\begin{cases}0, \text{若 } 3\mid n;\\ 2, \text{若 } 3\nmid n.\end{cases}$$

3. 平面上8点不在同一条直线上，也不在同一个圆上，它们至少确定几个圆？

4. 设$M$为凸形，证明$M$内有一点，过这点的任一条直线将$M$分为两部分，每一部分的面积$\geqslant\frac{4}{9}M$.

5. 设凸形$M$有两个等弦点$A$、$B$(即过$A$或$B$的弦长均为1)，证明凸形$M$关于$AB$及$AB$的垂直平分线对称.

6. 平面点集$M$中任意三点必有两点可见(即连结这两点的线段全在$M$中)，证明$M$是至多三个凸集的并集.

7. 证明宽为1的凸形中，正三角形的面积最小.

8. 证明宽为1的常宽凸形中，Reuleaux三角形的面积最小，圆的面积最大.

9. 证明平分凸形$M$的弦中，最短的$\leqslant\sqrt{\sqrt{3}M}$, $M$为凸形$M$的面积.

10. 包含在凸形$M$内的中心对称的凸形，以$M_2$的面积为最大，则$\frac{2}{3}\leqslant\frac{M_2}{M}\leqslant1$. 当且仅当$M$是三角形时左边等号成立；当且仅当$M$中心对称时右边等号成立.

11. 有限多个同样大小、边互相平行的正方形覆盖的面积为$S$. 证明可从中选出若干个互不重叠的正方形，它们覆盖的面积$\geqslant\frac{1}{4}S$.

**12**. 若凸形 $M$ 的宽度为 $W$，被宽度分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 的 $k$ 个带形覆盖，证明 $\sum \frac{d_i}{l_i} \geqslant 1$，其中 $l_i$ 是凸形 $M$ 的、与第 $i$ 个带形的边垂直的弦的最大长度($1 \leqslant i \leqslant k$)。

**13**. $\triangle ABC$ 的宽度（最小的高）为 $W$，带形的宽为 $d$，求它们的公共部分的面积的最大值。

**14**. 证明半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆能覆盖长为 1 的毛虫。

**15**. 证明 §3 图 3.11 中的截角菱形能覆盖长为 1 的毛虫。

**16**. 证明若凸形在每个方向上都包含一条长为 1 的线段，则它的面积至少为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，这时凸形是 §3 例 8 中高为 1 的正三角形。

**17**. 证明：$s(5)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$s(7)=3$。$s(n)$的意义见 §4。

**18**. 三角形的面积为 1，证明在这三角形内任五点中必有三点所成三角形的面积 $\leqslant(\sqrt{2}-1)^2$。

**19**. 凸四边形的面积为 1，证明在这四边形内任五点中必有三点所成三角形的面积 $\leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$。

**20**. 证明：单位面积的三角形内，任意两点及三个顶点组成的十个三角形中，至少有一个三角形的面积不超过 $3-2\sqrt{2}$。

**21**. 证明：单位面积的凸五边形内任一点与五个顶点组成的二十个三角形中，至少有一个三角形的面积 $<\frac{1}{6}$。

**22**. 平面上任给六点，证明其中最大距离与最小距离之比 $\lambda_6 \geqslant 2\sin\frac{2}{5}\pi$，并且 $\min \lambda_6 = 2\sin\frac{2}{5}\pi$。

**23**．证明直径为1的六边形，面积的最大值约为0.67498．取得最大值的六边形是唯一的，它不是正六边形．

**24**．证明任一组面积之和为1的正方形都可以放入边长为$\sqrt{2}$与$\frac{2}{\sqrt{3}}$的矩形中．

**25**．平面上$n$个点，以这些点为顶点的等腰三角形的个数$\leqslant n(n-1)$．举例说明可以有$(n-1)(n-2)$个等腰三角形．

**26**．平面上$n$个点，记以它们为顶点的、面积为1的三角形的个数的最大值为$f(n)$．证明：

$$c_1 n^2 \log\log n < f(n) < c_2 n^{\frac{5}{2}}$$

其中$c_1$、$c_2$为正的常数．

**27**．证明：对任一个三角形$ABC$，都可以将平面上的每个点染上红、黄、蓝三种颜色之一，使得每个顶点同色的三角形都不全等于$\triangle ABC$．

**28**．证明将平面上的点任意染上红色或蓝色时，一定有两个蓝色点距离为1；或者对任一四边形，有四个红色点组成的四边形与它全等．

# §10　未解决的问题

“只要一门科学中充满了大量问题，它就充满生命力，缺少问题则意味着死亡或独立发展的终止。”

——D·希尔伯特

根据笔者了解的情况，本节所列的问题，到目前为止，还没有人能够解决．如果读者解决其中一个或几个，那将是一件值得庆贺的事．希望您将结果整理，投寄有关数学刊物．因为只有正式在刊物上发表，才能被人承认．千万不要将文章寄给本书作者，因为他写完这本书后非常疲劳，没有精力再看这类深刻的论文，很可能顺手将它扔掉．明珠投暗，可惜之至．

做本节的问题，肯定要费很多的时间．没有时间做的读者浏览一下即可，不必一生“陷”在一两个问题里．做不出来，纯属正常．本书作者，没有能力解决这些问题，但也可以做一些其他的事(比如说写这本书)．

**1**．当 $n$ 为奇数时，求 $G$ 直线的条数 $g$ 的最小值．

**2**．平面上 $n$ 个点中每五点不共线，求 $t_4$，即有多少条直线过 4 个已知点？

**3**．在 $11\leqslant n\leqslant 22$ 时，如果 $n$ 个点中至多 $n-2$ 个共线，连结直线的条数是否至少为 $2n-4$？

4. 凸形能否有两个等弦点(即过这两个点中任一个的弦,长均相等,比如说均等于1)?

5. 平分凸形 $M$ 的最小弦是否 $<\sqrt{\frac{4M}{\pi}}$?

6. 两个全等的三角形有重叠部分,第一个三角形的周长被第二个盖住的部分与第二个三角形的周长被第一个盖住的部分的比,是否以 $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ 为最大值(其中 $\theta$ 为三角形的最小角)?

7. 凸形 $M$ 被宽度分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 的 $k$ 个带形覆盖,试问 $\sum \frac{d_i}{w_i} \geqslant 1$ 是否成立($w_i$ 是凸形的宽,方向与第 $k$ 个带形的边垂直)?

8. 将边长为 1 的正四面体用平面分成两个部分. 两部分的内径(所含的最大的球的半径)中较大的记为 $r$,怎样的平面使 $r$ 为最小? 更一般地,怎样用 $n-1$ 刀将一个土豆切成 $n$ 份(每一刀增加一份),使得 $n$ 个部分的内径的最大值为最小?

9. 如果任一组总面积为 1 的正方形都可以放进一个面积为 $A$ 的矩形中(矩形的形状可根据正方形组的不同而不同),$A$ 的最小值是多少?

10. 总面积为 1,最长的边为 1 的一组矩形能否嵌入面积为 2 的正方形中?

11. 总面积为 3,最长的边为 1 的一组矩形是否一定能覆盖边长为 1 的正方形?

12. 一组边互相平行的正方形覆盖面积为 $A$,从中选出一组不重叠的正方形,它们所覆盖的面积至多是多少?(目前

已经知道这个最大值小于 $\frac{1}{4}A$，大于 $0.116A$.）

**13**．$n$ 个点中每三点确定一个圆，记其中相等的圆的个数的最大值为 $f(n)$．已知 $f(3)=1$，$f(4)=f(5)=4$，$f(6)=8$，$f(7)=12$，$f(8)=16$，求 $f(9)$．又已知 $f(n)>cn^{\frac{3}{2}}$，$c$ 为常数．试确定 $f$ 的阶．

**14**．研究问题28中，4改为5结论是否成立？（已知4改为大于11的数结论不成立.）